Freiheitsgrade

In der Fragestunde am 7. Juli sind zwei Sachen besprochen worden, die mit Freiheitsgraden zu tun haben.

(1) Chiquadrat

Im ersten Beispiel am Anfang von §5.7.1 ist getestet worden, ob die Anzahl der Tore in einem Fußballspiel eine poissonverteilte ZV mit $\lambda = 3$ sein könnte. Ich habe die Anzahl Freiheitsgrade für die Chiquadratverteilung der Teststatistik als 8, die Anzahl Zellen, angegeben. Man muss aber einen Freiheitsgrad wegnehmen, weil die Gesamtsumme der erwarteten Werte der Gesamtsumme der Beobachtungen gleich sein muss.

Die kritischen Werte sind jetzt

$$P(T > 14.1) = 0.05 \quad P(T > 18.5) = 0.01$$

so dass die Schlussfolgerung, dass wir H_0 zu einem Testniveau von 5% verwerfen können, aber nicht zu einem Niveau von 1%, unverändert bleibt.

Im zweiten Teil des Beispiels, wo λ geschätzt worden ist, muss auch ein Freiheitsgrad abgenommen werden. Der 5% kritische Wert ist jetzt 12.6 und unser Schluss, dass H_0 in diesem Fall akzeptiert wird, bleibt.

(2) t Test

Im §16.8 von der W-Theorie Vorlesung haben wir gezeigt, dass die Statistik

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

t-verteilt mit $(n-1)$ Freiheitsgrade ist, wenn die X_i unabhängig normalverteilt sind. Der Beweis lief so:

1. $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n) \Rightarrow U = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

2. $V = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

3. $t = \frac{U}{\sqrt{V/(n-1)}} = \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

Daraus erkennen wir, dass die Teststatistik für den Zweistichproben t-Test im §5.4 so sein muss:

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

t-verteilt mit $(n_1 + n_2 - 2)$Freiheitsgrade.