

SS 2007, Stochastik IV: Übungsblatt 6

Aufgabe 1

Teilaufgaben (a) und (b). Wegen

$$\text{cov}\left(\sum a_i X_i, \sum b_j Y_j\right) = \sum \sum a_i b_j \text{cov}(X_i, Y_j)$$

für geeignet dimensionierte Zufallsvektoren X_i und Y_j , und

$$\text{cov}(Ax + a, By + b) = A \text{cov}(x, y) B'$$

für geeignet dimensionierte Zufallsvektoren x, y und 'konstante' Matrizen und Vektoren A, B bzw. a, b , gilt:

$$\begin{aligned} \text{cov}(x, y) &= \text{cov}(\Lambda y + e, y) \\ &= \text{cov}(\Lambda y, y) + \text{cov}(e, y) \\ &= \Lambda \text{cov}(y, y) + \text{cov}(y, e)' \\ &= \Lambda I_m + 0' \\ &= \Lambda \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{cov}(x) &= \text{cov}(\Lambda y + e, \Lambda y + e) \\ &= \text{cov}(\Lambda y, \Lambda y) + \text{cov}(\Lambda y, e) + \text{cov}(e, \Lambda y) + \text{cov}(e, e) \\ &= \Lambda \text{cov}(y, y) \Lambda' + \Lambda \text{cov}(y, e) + \text{cov}(e, y) \Lambda' + \Psi \\ &= \Lambda I_m \Lambda' + \Lambda 0 + 0' \Lambda' + \Psi \\ &= \Lambda \Lambda' + \Psi. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Teilaufgabe (a). Die Definition der Hauptkomponenten schreibt sich in Matrixform als

$$y = \text{diag}\{1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \dots, 1/\lambda_p\} \Lambda' x,$$

so dass

$$\text{diag}\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_p}\} y = \text{diag}\{1/\sqrt{\lambda_1}, 1/\sqrt{\lambda_2}, \dots, 1/\sqrt{\lambda_p}\} \Lambda' x.$$

Da die Spaltenvektoren (und damit auch die Zeilenvektoren) von

$$\Lambda \operatorname{diag}\left\{1/\sqrt{\lambda_1}, 1/\sqrt{\lambda_2}, \dots, 1/\sqrt{\lambda_p}\right\} = (\sqrt{\lambda_1}^{-1} a_1, \sqrt{\lambda_2}^{-1} a_2, \dots, \sqrt{\lambda_p}^{-1} a_p)$$

eine Orthonormalbasis bilden, ist letztere Matrix eine orthogonale Matrix:

$$\left(\Lambda \operatorname{diag}\left\{\sqrt{\lambda_1}^{-1}, \sqrt{\lambda_2}^{-1}, \dots, \sqrt{\lambda_p}^{-1}\right\}\right)^{-1} = \operatorname{diag}\left\{\sqrt{\lambda_1}^{-1}, \sqrt{\lambda_2}^{-1}, \dots, \sqrt{\lambda_p}^{-1}\right\} \Lambda'.$$

Daher folgt:

$$\begin{aligned} \Lambda y &= \Lambda \operatorname{diag}\left\{\sqrt{\lambda_1}^{-1}, \sqrt{\lambda_2}^{-1}, \dots, \sqrt{\lambda_p}^{-1}\right\} \operatorname{diag}\left\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_p}\right\} y \\ &= \Lambda \operatorname{diag}\left\{\sqrt{\lambda_1}^{-1}, \sqrt{\lambda_2}^{-1}, \dots, \sqrt{\lambda_p}^{-1}\right\} \operatorname{diag}\left\{\sqrt{\lambda_1}^{-1}, \sqrt{\lambda_2}^{-1}, \dots, \sqrt{\lambda_p}^{-1}\right\} \Lambda' x \\ &= I_p x \\ &= x. \end{aligned}$$

Teilaufgabe (b). Die Eigenwertgleichungen $Pa_j = \lambda_j a_j$ schreiben sich in Matrixform als

$$P\Lambda = \Lambda \operatorname{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\},$$

so dass

$$P\Lambda \operatorname{diag}\left\{\sqrt{\lambda_1}^{-1}, \dots, \sqrt{\lambda_p}^{-1}\right\} = \Lambda \operatorname{diag}\left\{\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_p}\right\}.$$

Da $\Lambda \operatorname{diag}\left\{\sqrt{\lambda_1}^{-1}, \dots, \sqrt{\lambda_p}^{-1}\right\}$ eine orthogonale Matrix ist (Teilaufgabe (a)), ergibt sich:

$$\begin{aligned} P &= P\Lambda \operatorname{diag}\left\{\sqrt{\lambda_1}^{-1}, \dots, \sqrt{\lambda_p}^{-1}\right\} \operatorname{diag}\left\{\sqrt{\lambda_1}^{-1}, \dots, \sqrt{\lambda_p}^{-1}\right\} \Lambda' \\ &= \Lambda \operatorname{diag}\left\{\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_p}\right\} \operatorname{diag}\left\{\sqrt{\lambda_1}^{-1}, \dots, \sqrt{\lambda_p}^{-1}\right\} \Lambda' \\ &= \Lambda \Lambda'. \end{aligned}$$

Teilaufgabe (c). Die hier beschriebene Art der Hauptkomponentenanalyse (mit entsprechend definierten Größen Λ und y) erfüllt für

$$\begin{aligned} m &:= p, \\ e &:= 0 \end{aligned}$$

die Modellgleichung

$$x = \Lambda y + e$$

und die Annahmen

$$\begin{aligned} E(y) &= 0, \\ \text{cov}(y) &= I_p \text{ (siehe Nachtrag unten),} \\ E(e) &= 0, \\ \text{cov}(e) &= \text{diag}\{\psi_1, \dots, \psi_p\}, \\ \text{cov}(y, e) &= 0 \end{aligned}$$

der Faktorenanalyse wie sie in Aufgabe 1 genannt sind. (Insbesondere ist auch die Gleichung $\text{cov}(x) = \Lambda\Lambda' + \Psi$ erfüllt, da hier $\Psi = 0$ ist. Genau genommen müsste man noch hinzufügen, dass auch $T := I_p$ (keine Rotation) gewählt wird, wobei T die orthogonale Matrix für die 'rotierten Faktoren' bezeichnet.)

Nachtrag. Wegen $\text{cov}(Ax + a, By + b) = A\text{cov}(x, y)B'$ gilt:

$$\text{cov}(y_i, y_j) = \text{cov}(\lambda_i^{-1}a'_i x, \lambda_j^{-1}a'_j x) = \lambda_i^{-1}a'_i \text{cov}(x, x) \lambda_j^{-1}a_j = \lambda_i^{-1}[a_i, a_j]$$

($[\cdot, \cdot]$: Skalarprodukt).