

Prof. Dr. Antony Unwin, Alexander Pilhöfer
Lehrstuhl für Rechnerorientierte Statistik und Datenanalyse
Institut für Mathematik
Universität Augsburg
<http://stats.math.uni-augsburg.de/>

Stochastik für Lehramt

Übungsblatt 4

Abgabe: Mittwoch 26. Mai 2010, bis spätestens 10.00 Uhr; Briefkasten: Stochastik für Lehramt

Die Aufgaben können auch in Gruppen bearbeitet und abgegeben werden! Für jede Aufgabe gibt es 5 Punkte. Lösungen in R können in Form eines Skriptes (Textdatei) per email an die jeweiligen Übungsgruppenleiter geschickt werden!

Grundlegendes:

- Welche diskrete Verteilung kann als Analogon zur Exponentialverteilung betrachtet werden?
 - Sei $Y \sim N(\mu, \sigma)$ normalverteilt. Für welche Werte a, b ist $(Y - a)/b = Y_s \sim N(0, 1)$ standardnormalverteilt?
 - Leiten Sie Erwartungswert und Varianz einer Gleichverteilung her!
-

- Man berechne für eine stetige Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f(x) = \frac{a}{1 + x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

- den Koeffizienten a ;
- die Verteilungsfunktion von X ;
- die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X einen Wert im Intervall $[0, 1]$ annimmt.

Tipp: Formelsammlung!

- Ein Assistent wohnt in M und arbeitet in H . Er beginnt um 8:30 Uhr morgens mit der Arbeit. Er nimmt jeden Morgen den Zug von M nach A , der in A laut Fahrplan um 8:10 Uhr ankommt. Dort fährt alle 15 min. eine Tram nach H ab. Die Tram, die um 8:15 Uhr in A startet, trifft laut Fahrplan um 8:26 Uhr in H ein. Die Verspätung des Zuges von M nach A beträgt durchschnittlich 4 min., mit einer Standardabweichung von 2 min. Die Tram von A nach H fährt immer pünktlich ab, erreicht H aber mit durchschnittlich 2 min. Verspätung und einer Standardabweichung von 4 min.

Behandeln Sie die nachfolgenden Teilaufgaben per Hand und als Vergleich auch in R.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Assistent nach 8:30 Uhr in H ankommt?
- Ein Professor startet in A mit seinem Auto um 8:15 Uhr. Seine Fahrzeit nach H beträgt durchschnittlich 12 min., mit einer Standardabweichung von 3 min. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Professor nach 8:30 Uhr in H ankommt?
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Professor und Assistent beide nach 8:30 Uhr in H ankommen. Welche Annahmen haben Sie zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten getroffen?

3. Sei X eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit dem Parameter $\lambda > 0$. Bestimmen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:

- (a) $P(j < X \leq j + 1)$, für $j = 0, 1, 2, 3, \dots$;
- (b) $P(X > s)$ für $s > 0$;
- (c) $P(X > s + t | X > s)$ für $s, t > 0$;
- (d) Falls $\alpha = P(X > s)$ gesetzt ist, so drücke man den Parameter λ durch die Größen α und s aus.

4. Laden Sie den Datensatz *Cars* von der Lehrstuhlwebseite in R.

- (a) Erstellen Sie ein Histogramm der Variable *DealerCost* mittels des Befehls `hist(..., freq = FALSE)`. Wählen Sie dabei eine passende Binbreite (Parameter `breaks = seq(a, b, s)`).
- (b) Zeichnen Sie mit dem Befehl `curve(..., add = TRUE)` die Dichte einer passenden Normalverteilung in das Histogramm. Wie gut beschreibt die Normalverteilung die Daten?
- (c) Für monetäre Größen ist die log-Normalverteilung (`dlnorm`) häufig die bevorzugte Wahl. Bei dieser Verteilung gilt $\log(X) \sim N(\mu, \sigma)$. Zeichnen Sie auch für diese Verteilung die Dichte in das Histogramm. Wählen Sie eine andere Farbe (`col`) und eine stärkere Linie (`lwd`). Ist die Anpassung besser? Welche Eigenschaften machen die log-Normalverteilung allgemein geeigneter für monetäre Größen?
- (d) **(Zusatz)** Eine weitere mögliche Verteilung mit geeigneten Eigenschaften ist die Gamma-Verteilung mit den Parametern $p(\text{shape})$ und $b(\text{rate})$. Für deren Erwartungswert und Varianz gilt: $E[X] = p/b$ und $V[X] = p/b^2$. Zeichnen Sie auch deren Dichte in das Histogramm ein!

5. Die nachfolgende Grafik visualisiert den Salzgehalt in ausgewählten Nahrungsmitteln.

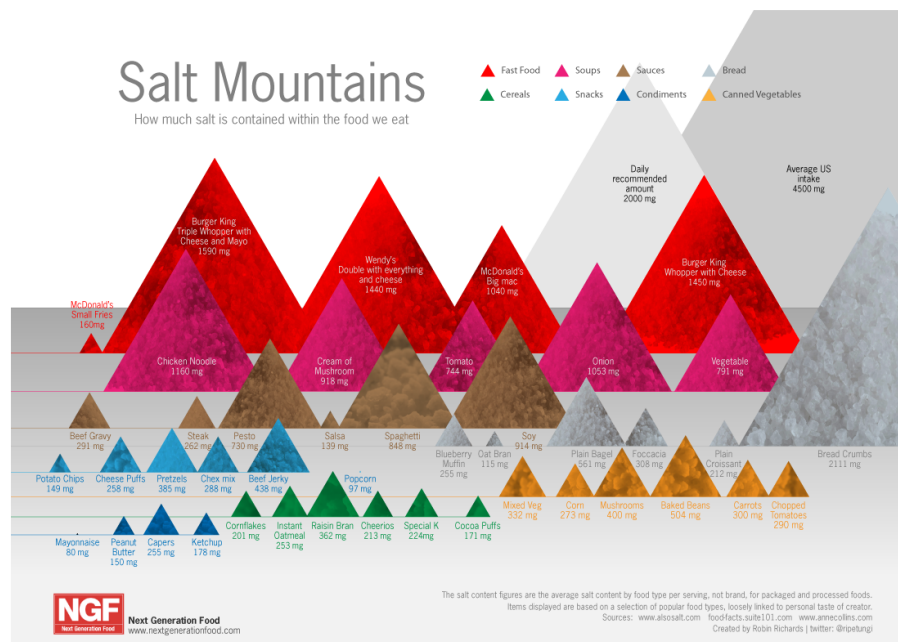


Abbildung 1: <http://www.nextgenerationfood.com/media/media-news/infographics/salt-mountains.png>

- (a) Beurteilen Sie die Grafik in Bezug auf Suggestivität, Eindeutigkeit und Ästhetik.
- (b) Was wird dargestellt? Ist die Darstellung gelungen? Diskutieren Sie die Grafik in Ihrer Übung!
- (c) Wie hätten Sie selbst das Thema visualisiert?

(R) Bearbeiten Sie folgende kurze Fragestellungen in R!

- (a) Was wird mit dem Ausdruck `pnorm(20, 10, 5) - pnorm(10, 10, 5)` berechnet?
- (b) Ziehen Sie eine Stichprobe X der Größe 1000 aus einer Gleichverteilung (`runif`) auf dem Intervall $[0,1]$.
- (c) Setzen die Werte aus b) in die Funktion `qnorm(X, mean = 5, sd = 2)` ein und erstellen Sie ein Histogramm der resultierenden Werte.