5.6 Summen von Zufallsvariablen: Faltung

5.6.1 Diskrete Zufallsvariablen — Poisson

Seien X, Y unabhängige poissonverteilte Zufallsvariablen:

$$X \sim P(\lambda_1) \text{ und } Y \sim P(\lambda_2)$$

Für $Z = X + Y$ gilt

$$\begin{aligned}
P(Z = z) &= \sum_{x=0}^{z} P(X = x) P(Y = z - x) \\
&= e^{-\lambda_1} e^{-\lambda_2} \sum_{x=0}^{z} \frac{\lambda_1^x}{x!} \frac{\lambda_2^{z-x}}{(z-x)!} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{z!} \sum_{x=0}^{z} \frac{z!}{x!(z-x)!} \lambda_1^x \lambda_2^{z-x} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^z}{z!}
\end{aligned}$$

so dass $Z \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$

5.6.2 Stetige Zufallsvariablen — Normal

Seien X, Y unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen:

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \text{ und } Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

Für $Z = X + Y$ gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(z-x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} e^{-\frac{(z-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \end{aligned}$$

so dass $Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Wir brauchen

$$ax^2 + 2bx + c = (\sqrt{a}x + b/\sqrt{a})^2 - b^2/a + c$$

5.7.4 Auswertung von Wahrscheinlichkeiten für $N(\mu, \sigma^2)$

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x$$

Numerisch integrieren — besser Experten überlassen.

$$P(a \leq X \leq b) = P(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma})$$

wo $Z \sim N(0,1)$ die Standardnormalverteilung

Zum Beispiel, gegeben $X \sim N(i,1)$ was ist $P(X < 0)$?

$P(Z < i)$	Excel	R
0	0.5	0.5
-1	0.1587	0.1587
-5	2.867E-07	2.867E-07
-10	7.620E-24	7.620E-24

Nach Marsaglia "Evaluating the Normal Distribution Function" ist $P(Z < -10) = 7.61985302416053E-24$
Mit Excel bekommen wir $7.619853E-24$
Und R gibt uns $7.61985302416053E-24$