Andreas Hochlenert
Veronika Schuster

Die F-Verteilung

1. Definition:

Seien X ~ $\chi^2(m)$ und Y ~ $\chi^2(n)$ -verteilt und voneinander unabhängig. Dann heißt die Verteilung der Zufallsvariable

$$Z = \frac{X/m}{Y/n}$$

F-verteilt mit den Freiheitsgraden *m* und *n*, kurz $Z \sim F(m, n)$. Es gilt:

$$E(Z) = \frac{n}{n-2} \quad \text{für } n \geq 3$$

$$Var(Z) = \frac{2n^2(n+m-2)}{m(n-4)(n-2)^2} \quad \text{für } n \geq 5$$

2. Definition:

Eine Zufallsvariable

$$Z = \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} Y_i^2 \right) \Big/ \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} V_i^2 \right)$$

heißt (zentral) **F-verteilt mit m und n Freiheitsgraden** ($Z \sim F_{m,n}$), wenn $Y_1, \ldots, Y_m$ und $V_1, \ldots, V_m$ (stochastisch) unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsvariablen sind. Eine $F_{m,n}$ -verteilte Zufallsvariable ergibt sich somit gerade als Quotient einer $\chi^2(m)$ und einer $\chi^2(n)$-verteilten Zufallsvariablen, multipliziert mit *n/m*.

Die Dichte der $F_{m,n}$ –Verteilung ist

$$f_{F_{m,n}}(x) = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} \cdot x^{m/2-1}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} (1 + \frac{m}{n} x)^{-\frac{m+n}{2}} \qquad \text{für } x>0$$

dabei bezeichnet

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

die Eulerische Betafunktion, und $\Gamma(\cdot)$ die Gammafunktion.

Ist n > 2, so existiert der Erwartungswert

$$EZ = \frac{n}{n-2}$$

und ist n > 4, so existiert die Varianz

$$Var(Z) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$$

einer $F_{m,\,n}$ –verteilten Zufallsvariablen Z. Ist n groß, so lässt sich die Verteilung von m*Z auch durch eine $\chi^2(m)$ –Verteilung approximieren.

Quelle: Hartung, „Statistik“

Beim Nachschlagen von Tafelwerken macht man sich zunutze, dass gilt

$$F_{m,n;1-\alpha} = \frac{1}{F_{n,m;\alpha}}$$

und

$$t_{n;(1+\alpha)/2} = \sqrt{F_{1,n,\alpha}} \quad .$$

Quelle: Hartung, „Statistik“