

Stochastische Unabhängigkeit

Definition:

A, B seien Ereignisse. Wir bezeichnen A und B als stochastisch unabhängig, falls gilt:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Falls $P(B) > 0$, so ist dies äquivalent zu $P(A) = P(A|B)$.

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeit.

Beispiel:

- Kartenspiel mit 52 Karten
- Es wird eine Karte gezogen
- A : gezogene Karte ist ein As
- B : Farbe ist Herz

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52}, \quad P(A) = \frac{4}{52}, \quad P(B) = \frac{13}{52}$$

$\Rightarrow A$ und B stochastisch unabhängig.

Verallgemeinerung:

A_1, A_2, \dots, A_n sind genau dann unabhängig, wenn

$P(\bigcap A_j) = \prod P(A_j)$ für jede Teilfamilie gilt.

Achtung!

Falls $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ für jedes Paar A_i, A_j gilt, sind A_1, \dots, A_n paarweise unabhängig, aber nicht unbedingt unabhängig.

Beispiel:

- 2x Münze werfen
- $A = \{1. \text{ Wurf Kopf}\}$
- $B = \{2. \text{ Wurf Zahl}\}$
- $C = \{\text{Beide Würfe verschieden}\}$

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{4} = P(B)P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C)$$

\Rightarrow Paarweise unabhängig, aber nicht unabhängig.

Unabhängigkeit von stetigen Zufallsvariablen:

Zwei stetige Zufallsvariablen X und Y sind unabhängig, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y) = F_X(x)F_Y(y)$$

gilt.

Dabei ist $F_X(x)$ bzw. $F_Y(y)$ die Verteilungsfunktion von X bzw. Y .

Allgemeiner sind die stetigen Zufallsvariablen

X_1, X_2, \dots, X_n unabhängig, wenn für $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

$$P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = P(X_1 \leq x_1) \cdot \dots \cdot P(X_n \leq x_n)$$

gilt.