

Ein Punktschätzer (z.B. über Maximum-Likelihood berechnet) liefert uns einen Parameterschätzer $\hat{\theta}$, der im Regelfall nicht mit θ identisch ist. Daher eignet sich in den meisten Fällen eine Intervallschätzung besser als eine Punktschätzung.

$(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall: (Fahrmeir)

Zur vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit α liefern die aus den Stichprobenvariablen X_1, \dots, X_n gebildeten Schätzstatistiken

$$G_u = g_u(x_1, \dots, x_n) \text{ und } G_o = g_o(x_1, \dots, x_n)$$

ein $(1 - \alpha)$ Konfidenzintervall, wenn gilt

$$P(G_u \leq G_o) = 1$$

$$P(G_u \leq \theta \leq G_o) = (1 - \alpha)$$

wobei $1 - \alpha$ auch als Sicherheits- oder Konfidenzwahrscheinlichkeit bezeichnet wird. Das sich aus den Realisationen x_1, \dots, x_n ergebende realisierte Konfidenzintervall besitzt die Form

$$[g_u, g_o]$$

wobei $g_u = g_u(x_1, \dots, x_n)$ und $g_o = g_o(x_1, \dots, x_n)$

Wenn wir die Verteilung unseres Schätzer kennen, können wir vor Ziehung Vorhersageintervalle berechnen:

sei z.B. $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ wobei μ unbekannt

$$\Rightarrow \left(\bar{x} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

ist ein 0.95-Konfidenzintervall für μ

Beispiel:

Wir suchen die Wahrscheinlichkeit p , dass in der Mensa der Universität Augsburg um 11.45 Uhr die Warteschlange an der Tablettausgabe mindestens bis zur Treppe geht.

Daten:

- 64 Mensabesuche um 11.45 Uhr
- 51 mal geht die Warteschlange mindestens bis zur Treppe und 13 mal ist sie kürzer

$$\Rightarrow \hat{p} = \frac{51}{64} \approx 0.7969$$

- Approximation $p = 0.5$:

$$P_{\hat{p}} \left(\hat{p} - 1.96 \frac{1}{\sqrt{4N}} < p < \hat{p} + 1.96 \frac{1}{\sqrt{4N}} \right) \geq 0.95 \\ \Rightarrow (0.6744, 0.9194)$$

- 'Plug-in':

$$P_{\hat{p}} \left(\hat{p} - 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{N}} < p < \hat{p} + 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{N}} \right) \approx 0.95 \\ \Rightarrow (0.6983, 0.8955)$$

- Normal genau:

$$\text{löse } (\hat{p} - p)^2 = 1.96^2 \frac{p(1-p)}{N} \quad \text{nach } p_1, p_2 \text{ auf} \\ \Rightarrow (0.6830, 0.8772)$$