Susanne Zobel
Andreas Habersetzer

1 A-posteriori-Wahrscheinlichkeit

1.1 Wörtliche Übersetzung

a-priori: lat., von dem, was vorher kommt
a-posteriori: lat., von dem, was nachher kommt

1.2 Definition

Satz von Bayes:

Sei $A_1, ..., A_k$ eine disjunkte Zerlegung von Ω, wobei für mindestens ein i, $i = 1, ..., k$, $P(A_i) > 0$ und $P(B|A_i) > 0$ erfüllt ist. Dann gilt:

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(B|A_i)P(A_i)} = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{P(B)}, j = 1..k.$$

Im Zusammenhang mit dem Satz von *Bayes* werden die Wahrscheinlichkeiten $P(A_i)$ auch als *a-priori Wahrscheinlichkeiten* und $P(A_i|B)$ als *a-posteriori Wahrscheinlichkeiten* bezeichnet, da $P(A_i)$ das Eintreten von A_i vor Kenntnis des Ereignisses B und $P(A_i|B)$ das Eintreten dieses Ereignisses nach Kenntnis von B bewertet.

(vgl. Fahrmeir, L., Künstler,R., Pigeot, I., Tutz, G. (1997) *Statistik*, S. 210)

Susanne Zobel
Andreas Habersetzer

1.3 Beispiel: Suche nach dem Mörder

- Blutspur des Mörders am Tatort $\rightarrow$ Blutgruppe B
- Es wird ein Tatverdächtiger festgenommen
- Es stellt sich nun die Frage, ob es sich um den Täter handelt
- Betrachtet werden nun folgende Ereignisse:

  $A_1 = \{$Der Tatverdächtige ist der Mörder$\}$,
  $A_2 = \overline{A_1} = \{$Der Tatverdächtige ist nicht der Mörder$\}$,
  $B = \{$Die Blutgruppe der Blutspur stimmt mit der des Tatverdächtigen überein$\}$.
- Kommissar denkt: Der Tatverdächtige hat die Tat begangen oder nicht $\rightarrow P(A_1) = P(\overline{A_1}) = 0,5$
- Es folgt nun: $P(B|A_1) = 1$;

  Ausserdem wird angenommen, dass $P(B|\overline{A_1}) = 0,25$
- Der Satz von Bayes liefert nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Tatverdächtige der Mörder ist, wenn er Blutgruppe B hat, und zwar als

$$\begin{aligned} P(A_1|B) &= \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|\overline{A_1})P(\overline{A_1})} \\ &= \frac{1 \cdot 0,5}{1 \cdot 0,5 + 0,25 \cdot 0,5} = 0,8 \end{aligned}$$

  $\rightarrow$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Verdächtige die Tat begangen hat ist also sehr hoch
- ABER: Die Annahme, dass die a-priori Wahrscheinlichkeit 0,5 beträgt ist unsinnig.

Nimmt man im Gegensatz dazu an, dass jeder Bürger eines Landes (60 Mio. Einwohner) der Mörder sein könnte, dann ist $P(A_1) = \frac{1}{6 \cdot 10^7}$

Bayes berechnet dann:

$$P(A_1|B) \quad = \quad \frac{\frac{1}{6} \cdot 10^{-7} \cdot 1}{\frac{1}{6} \cdot 10^{-7} \cdot 1 + (1 - (\frac{1}{6} \cdot 10^{-7}) \cdot 0,25} \approx \frac{3}{2} \cdot 10^{-7}$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist nun verschwindend gering.

> $\Longrightarrow$ An diesem Beispiel wird deutlich, wie stark die a-posteriori Wahrscheinlichkeiten von den Annahmen über die a-priori Wahrscheinlichkeit beeinflusst werden können.