Lehrstuhl für Rechnerorientierte Statistik und Datenanalyse
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Statistik II— Übungsblatt 1 No. 5

Zunächst Klarstellung der Notation:

$$
\begin{aligned}
X &= \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times p} \\
X_{(i)} &= \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_{i-1}' \\ x_{i+1}' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times p} \\
X'X &= \sum_{i=1}^{n} x_i x_i^{'} \in \mathbb{R}^{p\times p} \\
X_{(i)}'X_{(i)} &= \sum_{\ell\neq i} x_\ell x_\ell^{'} \in \mathbb{R}^{p\times p} \qquad \ell = 1,\dots,n \\
Y_{(i)} &= \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{i-1} \\ y_{i+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1} \\
X'Y &= \begin{pmatrix} \sum\limits_{\ell=1}^{n} x_{\ell 1} y_\ell \\ \vdots \\ \sum\limits_{\ell=1}^{n} x_{\ell p} y_\ell \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p} \\
X_{(i)}'Y_{(i)} &= \begin{pmatrix} \sum\limits_{\ell\neq i} x_{\ell 1} y_\ell \\ \vdots \\ \sum\limits_{\ell\neq i} x_{\ell p} y_\ell \end{pmatrix} = X'Y - \begin{pmatrix} x_{i1} y_i \\ \vdots \\ x_{ip} y_i \end{pmatrix} = X'Y - x_i y_i \in \mathbb{R}^{p}
\end{aligned}
$$

Beachten Sie: x_i ist ein $p-$dimensionaler Spaltenvektor, y_i eine reelle Zahl.

Damit gilt:

$$X_{(i)}'X_{(i)} = \sum_{\ell\neq i} x_\ell x_\ell^{'} = \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell x_\ell^{'} - x_i x_i' = X'X - x_i x_i'.$$

Damit ergibt sich unter Verwendung des Hinweises:

$$\left(X_{(i)}'X_{(i)}\right)^{-1} = \left(X'X\right)^{-1} + \frac{1}{1 - x_i'\left(X'X\right)^{-1} x_i} \left(X'X\right)^{-1} x_i x_i' \left(X'X\right)^{-1}.$$

Im Modell mit allen Beobachtungen erhält man als Kleinste-Quadrate-Schätzer für β:

$$\hat{\beta} = \left(X'X\right)^{-1} X'Y.$$

Das $i-$te Diagonalelement der Hutmatrix H ist gegeben durch

$$\begin{aligned} h_i &= \left(X' \left(X'X\right)^{-1} X'\right)_{ii} \\ &= x_i' \left(X'X\right)^{-1} x_i. \end{aligned}$$

Das $i-$te Residuum erhält man als

$$e_i = y_i - x_i'\hat{\beta}.$$

Im reduzierten Modell ohne die $i-$te Beobachtung erhält man als Kleinste-Quadrate-Schätzer für β:

$$\hat{\beta}_{(i)} = \left(X_{(i)}'X_{(i)}\right)^{-1} X_{(i)}'Y_{(i)},$$

als vorhergesagte Werte

$$\hat{y}_{i(i)} = x_i'\hat{\beta}_{(i)},$$

als $i-$tes Residuum

$$e_{i(i)} = y_i - \hat{y}_{i(i)} = y_i - x_i'\hat{\beta}_{(i)},$$

und als Leverage-Wert

$$\begin{aligned} h_{i(i)} &= x_i' \left(X_{(i)}'X_{(i)}\right)^{-1} x_i \\ &= \left(X \left(X_{(i)}'X_{(i)}\right)^{-1} X'\right)_{ii}. \end{aligned}$$

Des weiteren gilt

$$s_{(i)}^2 = \frac{1}{n-1-p} \left(Y_{(i)} - X_{(i)}\hat{\beta}_{(i)}\right)' \left(Y_{(i)} - X_{(i)}\hat{\beta}_{(i)}\right).$$

Lemma 1.

$$\hat{\beta}_{(i)} = \hat{\beta} - \frac{1}{1-h_i} \left[\left(X'X\right)^{-1} x_i e_i\right].$$

Beweis 1.

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{(i)} &= \left(X_{(i)}'X_{(i)}\right)^{-1} X_{(i)}'Y_{(i)} \\ &= \left(X_{(i)}'X_{(i)}\right)^{-1} \left(X'Y - x_i y_i\right) \\ &= \left[\left(X'X\right)^{-1} + \frac{1}{1 - x_i' \left(X'X\right)^{-1} x_i} \left(X'X\right)^{-1} x_i x_i' \left(X'X\right)^{-1}\right] \left(X'Y - x_i y_i\right) \\ &= \left(X'X\right)^{-1} X'Y - \left(X'X\right)^{-1} x_i y_i + \\ &\quad \frac{1}{1 - x_i' \left(X'X\right)^{-1} x_i} \left[\left(X'X\right)^{-1} x_i x_i' \left(X'X\right)^{-1} X'Y - \left(X'X\right)^{-1} x_i x_i' \left(X'X\right)^{-1} x_i y_i\right] \\ &= \hat{\beta} - \left(X'X\right)^{-1} x_i y_i + \frac{1}{1-h_i} \left[\left(X'X\right)^{-1} x_i x_i'\hat{\beta} - \left(X'X\right)^{-1} x_i h_i y_i\right] \\ &= \hat{\beta} - \frac{1}{1-h_i} \left[\left(X'X\right)^{-1} x_i (y_i - x_i'\hat{\beta}) + h_i \left(X'X\right)^{-1} x_i y_i - \left(X'X\right)^{-1} x_i h_i y_i\right] \\ &= \hat{\beta} - \frac{1}{1-h_i} \left[\left(X'X\right)^{-1} x_i e_i\right]. \quad \square \end{aligned}$$

Lemma 2.

$$e_{i(i)} = \frac{e_i}{1-h_i}$$

Beweis 2.

$$\begin{aligned}
e_{i(i)} &= y_i - x_i'\hat{\beta}_{(i)} \\
&= y_i - x_i'\hat{\beta} + \frac{1}{1-h_i} x_i' \left(X'X\right)^{-1} x_i e_i \\
&= e_i + \frac{h_i}{1-h_i} e_i \\
&= \frac{(1-h_i)e_i + h_i e_i}{1-h_i} \\
&= \frac{e_i}{1-h_i}. \quad \square
\end{aligned}$$

Lemma 3.

$$h_{i(i)} = \frac{h_i}{1-h_i}$$

Beweis 3.

$$\begin{aligned}
h_{i(i)} &= x_i' \left(X_{(i)}' X_{(i)}\right)^{-1} x_i \\
&= x_i' \left(X'X\right)^{-1} x_i + \frac{1}{1 - x_i' \left(X'X\right)^{-1} x_i} x_i' \left(X'X\right)^{-1} x_i x_i' \left(X'X\right)^{-1} x_i \\
&= h_i + \frac{1}{1-h_i} h_i^2 \\
&= h_i \left(1 + \frac{h_i}{1-h_i}\right) \\
&= h_i \left(\frac{1-h_i+h_i}{1-h_i}\right) \\
&= \frac{h_i}{1-h_i}. \quad \square
\end{aligned}$$

Aus Lemma 3 folgt insbesondere:

$$\begin{aligned}
1 + h_{i(i)} &= 1 + \frac{h_i}{1-h_i} \\
&= \frac{1-h_i+h_i}{1-h_i} \\
&= \frac{1}{1-h_i}.
\end{aligned}$$

Die ursprünglich zu zeigende Aussage lautet:

$$e_{i(i)}^* = \frac{e_i}{s_{(i)}\sqrt{1-h_i}} = \frac{e_{i(i)}}{s_{(i)}\sqrt{1+h_{i(i)}}}.$$

Dies läßt sich umformen zu:

$$\frac{e_i}{\sqrt{1-h_i}} = \frac{e_{i(i)}}{\sqrt{1+h_{i(i)}}}.$$

Damit ergibt sich die Gesamtbehauptung aus den Lemmata 2 und 3 gemäß:

$$\begin{aligned}
e_i &= \frac{\sqrt{1-h_i}}{\sqrt{1+h_{i(i)}}} e_{i(i)} \\
&= e_{i(i)}(1-h_i) \\
&= e_i \quad \square
\end{aligned}$$