Lehrstuhl für Rechnerorientierte Statistik und Datenanalyse
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Statistik II— Übungsblatt 5 No. 3

1. OLS-Schätzer ist BLUE

OLS: O*rdinary* L*east* S*quares, BLUE:* B*est* L*inear* U*nbiased* E*stimator*

Gegeben sei ein lineares Modell der Form

$$y = X\beta + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2 I).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[y] &= X\beta \\ \mathrm{VAR}[y] &= \sigma^2 (X'X)^{-1} \\ \hat{\beta} &= (X'X)^{-1}X'y \end{aligned}$$

Schon bekannt: $\hat{\beta}$ ist erwartungstreu, denn $\mathrm{E}[\hat{\beta}] = \mathrm{E}[(X'X)^{-1}X'y] = \mathrm{E}[(X'X)^{-1}X'X\beta] = \beta$. Außerdem gilt: $\mathrm{VAR}[\hat{\beta}] = (X'X)^{-1}X'\mathrm{VAR}[y]X(X'X)^{-1} = \sigma^2(X'X)^{-1}$.

Noch z. z.: Der OLS-Schätzer $\hat{\beta}$ hat die kleinste Varianz unter allen linearen erwartungstreuen Schätzern für β.

Sei dazu β^* ein anderer linearer erwartungstreuer Schätzer für β. Dann läßt sich schreiben: $\beta^* = Gy$. Aus der Erwartungstreue von β^* folgt $\mathrm{E}[\beta^*] = \mathrm{E}[Gy] = \mathrm{E}[GX\beta] \overset{!}{=} \beta$ und damit $GX = I$.

Mit $\mathrm{VAR}[\beta^*] = \sigma^2 GG'$ bleibt zu zeigen:

$$\sigma^2 GG' \geq_{\mathrm{L}} \sigma^2 (X'X)^{-1}$$

$$\iff GG' - (X'X)^{-1} \geq_{\mathrm{L}} 0.$$

Letzteres ist leicht einzusehen, da wegen $GX = I$ gilt:

$$GG' - (X'X)^{-1} = \left(G - (X'X)^{-1}X'\right)\left(G - (X'X)^{-1}X'\right)'.$$

Ergänzung: $\hat{\beta}$ hat auch in jeder Komponente kleinere Varianz als β^*. Es sei $H := G - (X'X)^{-1}X'$. Dann gilt: $HX = (G - (X'X)^{-1}X')X = 0$. Also können wir schreiben:

$$\beta^* = ((X'X)^{-1}X' + H)(X\beta + \varepsilon) = \beta + ((X'X)^{-1}X' + H)\varepsilon.$$

Damit ergibt sich die Varianz–Kovarianzmatrix von β^* zu:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[(\beta^* - \beta)(\beta^* - \beta)'] &= \mathrm{E}[((X'X)^{-1}X' + H)\varepsilon\varepsilon'((X'X)^{-1}X' + H)'] \\ &= ((X'X)^{-1} + HH')\sigma^2. \end{aligned}$$

Die Diagonalelemente von $((X'X)^{-1} + HH')\sigma^2$ sind die Varianzen der Elemente von β^*. Es gilt aber

$$\mathrm{VAR}[\beta_j^*] = \left((X'X)^{-1}_{jj} + \sum_{i=1}^{n} h_{ji}^2\right)\sigma^2 \geq (X'X)^{-1}_{jj}\sigma^2 = \mathrm{VAR}[\hat{\beta}_j].$$

Also hat der OLS-Schätzer die kleinste Varianz unter allen linearen erwartungstreuen Schätzern.

2. Verallgemeinerung auf GLS-Schätzer

GLS: G*eneralized* L*east* S*quares*

Es sei nun $\mathrm{VAR}[\varepsilon\varepsilon'] = \sigma^2 V$, mit einer symmetrischen, positiv definiten $n \times n$ Matrix V. Daher existiert eine nichtsinguläre Matrix P mit $P'VP = I$. Mit der Transformation $y^* := Py = PX\beta + P\varepsilon = X^*\beta + \varepsilon^*$, wobei $X^* := PX$ und $\varepsilon^* := P\varepsilon$. Damit haben wir $\mathrm{E}[\varepsilon^*] = 0$ und $\mathrm{VAR}[\varepsilon^*] = \sigma^2 I$. BLUE von β ist der OLS-Schätzer, also

$$\hat{\beta} = (X^{*\prime}X^*)^{-1}X^{*\prime}y^*,$$

oder

$$\hat{\beta} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y,$$

da natürlich $P'P = V^{-1}$ gilt.

Also ist der GLS-Schätzer BLUE. GLS- und OLS-Schätzer fallen zusammen, falls gilt:

$$0 = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1} - (X'X)^{-1}X' = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}(I - A),$$

wobei $A := X(X'X)^{-1}X'$. Also muß gelten

$$\begin{aligned} X'V^{-1}(I-A) &= 0 \\ \text{bzw. } (I-A)V^{-1}X &= 0 \\ \Longleftrightarrow\; V^{-1}X &= AV^{-1}X = X(X'X)^{-1}X'V^{-1}X, \end{aligned}$$

was wiederum bedeutet, daß das Bild von $V^{-1}X$ im Bild von X enthalten ist. Da nun der Rang von V^{-1} gleich dem Rang von V gleich n ist, gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Bild[V^{-1}X]} \subseteq \mathrm{Bild[X]} &\Longleftrightarrow \mathrm{Bild[V^{-1}X]} = \mathrm{Bild[X]} \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{Bild[X]} = \mathrm{Bild[VX]} \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{Bild[VX]} \subseteq \mathrm{Bild[X]} \quad \square \end{aligned}$$