

Anwendungen – Stetige Wahrscheinlichkeiten

“Proximus ecclesiae semper vult ultimus esse.”

Warum? Nehmen wir an, dass die Fahrtzeit von der Entfernung, d , abhängt:

$$X \sim N(\mu(d), \sigma^2(d))$$

und dass man das Haus früh genug verlässt, so dass

$$P(\text{man kommt zeitlich an}) \geq 1 - \alpha$$

Aktienmärkte

Ein gängiges Modell für Aktienpreisbewegungen nimmt an, dass Log Änderungen normalverteilt sind, d.h.

Sei $X(t)$ der Preis am Tag t , gilt

$$Y(t) = \log \frac{X(t)}{X(t-1)} \sim N(\mu, \sigma^2)$$

1. Was ist die Verteilung der Änderung nach einem Jahr (nehmen wir 250 Tage pro Jahr an)?
2. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Aktie im Wert in einem Jahr doppelt? Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Aktie aus N im Wert doppelt? Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau eine Aktie aus N im Wert doppelt? Was ist die Verteilung der maximalen Verbesserung aus N Aktien?
3. Was ist die Verteilung des Werts eines Aktienpakets von N Aktien mit ursprünglichen Gewichten w_i nach n Tage?

Lebensdauer von Geräten

Die Lebensdauer von Geräten, T , kann manchmal mit einer Rayleigh Verteilung modelliert werden:

$$f(t) = \frac{t}{\sigma^2} e^{-\frac{1}{2} \frac{t^2}{\sigma^2}}$$

$$0 \leq t < \infty \quad \sigma > 0$$

1. Was ist der Erwartungswert von T ?
2. Was ist die Dichte einer Rayleighverteilten ZV gegeben $T > s$?
3. Was ist der Erwartungswert der verbleibenden Lebensdauer?
4. Die Hazardrate einer ZV T zum Zeitpunkt t wird als der Quotient der Dichte und der Wahrscheinlichkeit

$P(T > t)$ definiert. Was ist die Hazardrate einer Rayleighverteilten ZV? Was ist die Hazardrate einer exponentialverteilten ZV? Was ist die Hazardrate einer Chiquadratverteilten ZV? Wie soll man diese Hazardraten interpretieren?

5. Der Hersteller bietet einen vollen Ersatz für das Produkt, falls es innerhalb von einer Zeit s_0 nach dem Kauf nicht mehr geht. Was sind die erwarteten Kosten dieser Garantie?
6. Wenn jemand drei Geräte hintereinander benutzt, was ist die Verteilung der Gesamtlebensdauer? Gegeben, dass die zwei ersten beide unter Garantie ersetzt worden sind, aber die dritte nicht, was ist die Verteilung der Gesamtlebensdauer?
7. Gegeben einer Gesamtlebensdauer der drei Geräte von s_g , was ist die Wahrscheinlichkeit, dass keins unter Garantie ersetzt werden müßte?

Transformationen

Sei X chiquadratverteilt mit k Freiheitsgraden:

$$f(x) = \frac{x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{\frac{k}{2}}}$$

1. Was ist die Verteilung von $Y = \log X$?
2. Was ist die Verteilung von $W = X^m$?