

Probeklausur Frage 3(a)

Sei X, Y u.i.v. $U(0, a)$, was ist die Dichte von $Z = \frac{X}{Y}$?

$$\begin{aligned} P(Z \leq z) &= P(X \leq yz | Y = y) P(Y = y) \\ &= \int_0^a \int_0^{\min(a, yz)} \frac{1}{a^2} dx dy \end{aligned}$$

1) Für $z \leq 1$ gilt $yz < a$ und

$$\begin{aligned} P(Z \leq z) &= \int_0^a \int_0^{yz} \frac{1}{a^2} dx dy \\ &= \int_0^a \frac{yz}{a^2} dy \\ &= \frac{1}{2} z \end{aligned}$$

2) Für $z > 1$ gilt

$$\min(a, yz) = a \text{ wenn } y > \frac{a}{z}$$

$$\min(a, yz) = yz \text{ wenn } y < \frac{a}{z}$$

$$P(Z \leq z) = \int_{\frac{a}{z}}^a \int_0^a \frac{1}{a^2} dx dy + \int_0^{\frac{a}{z}} \int_0^{yz} \frac{1}{a^2} dx dy$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\frac{a}{z}}^a \frac{1}{a} dy + \int_0^{\frac{a}{z}} \frac{yz}{a^2} dy \\ &= 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2z} \\ &= 1 - \frac{1}{2z} \end{aligned}$$

Deshalb ist die Dichte von Z

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{1}{2} & z \leq 1 \\ &= \frac{1}{2z^2} & z > 1 \end{aligned}$$

(Ich hatte nicht zwischen den zwei Fällen $z \leq 1$ und $z > 1$ unterschieden.)