Lehrstuhl für Rechnerorientierte Statistik und Datenanalyse, Prof. Antony R. Unwin
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Wahrscheinlichkeitstheorie
Übungsblatt 4

Abgabe: Mittwoch, 16.11.05, 14:01 Uhr, Briefkasten: Wahrscheinlichkeitstheorie.
Insgesamt können maximal 25 Punkte erreicht werden.

1. Für Tennisprofis gibt es eine Weltrangliste. Nehmen wir an, daß die Wahrscheinlichkeit, daß der Spieler mit Rang j ein Spiel gewinnt, unabhängig vom Gegner, proportional zu $1/j$ ist. Beim Masters-Turnier stehen die Spieler mit den Rängen 2, 3, 7 und 9 im Halbfinale.

   (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Spielausgänge zwischen zwei Spielern mit den Rängen m und n ($m \neq n$, $m \neq 1$, $n \neq 1$).

   (b) Für das Halbfinale werden folgende Paarungen ausgelost: Rang 2 vs. Rang 3 und Rang 7 vs. Rang 9. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Spieler mit Rang 7 das Turnier gewinnt?

2. Gegeben seien zwei faire Würfel. Die Seiten des ersten sind mit den Zahlen von 1 bis 6 beschriftet (Punktwürfel), der andere Würfel hat zwei rote, zwei grüne und zwei gelbe Seiten (Farbwürfel).

   Es wird Ihnen folgendes Spiel angeboten: Sie starten mit 0 Punkten und würfeln immer abwechselnd den Zahlenwürfel und den Farbwürfel, wobei Ihnen jeweils die Punkte gutgeschrieben werden, bis Sie ROT werfen. Dann endet das Spiel.

   (a) Berechnen Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion für die Anzahl der Punkte auf Ihrem Punktekonto. (Zwischenergebnis: $g(z) = \frac{3(1-z)}{9(1-z)-z(1-z^6)}$.)

   (b) Würden Sie sich auf dieses Spiel einlassen, wenn Ihr Einsatz 10 € beträgt, und für jeden erreichten Punkt 1 € ausbezahlt wird? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. Lassen Sie den Computer $3,000$ mal würfeln. Erfassen Sie bei jedem Wurf, ob eine Sechs gewürfelt wurde oder nicht. Berechnen Sie außerdem nach jedem Wurf die Größen $D(n)$ und $R(n)$, wobei $D(n)$ die Differenz der tatsächlich im Experiment bis zum n-ten Wurf gewürfelten Sechsen und der erwarteten Anzahl Sechser bis zum n-ten Wurf ist, und $R(n)$ die Abweichung der relativen Häufigkeit der Sechs nach dem n-ten Wurf vom theoretischen Wert ist. Plotten Sie die Funktionen $D(n)$ und $R(n)$ gegen $n = 1, \dots, 3000$. Beschreiben Sie das langfristige Verhalten der Funktionen.

4. Die Größe von Waldbränden werde mit positiven ganzen Zahlen $\{1, 2, 3, \dots\}$ klassifiziert. Ihre Verteilung sei:
$$\mathrm{P}\,(\text{Größe} = s) = 0.5^s.$$
   Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Feuer entdeckt wird, hängt von der Größe des Brandes ab:
$$\mathrm{P}\,(\text{entdeckt}|\text{Größe} = s) = 1 - \kappa \cdot 0.6^s.$$

   (a) Welche Werte für κ sind möglich?

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Feuer größer als w ist, wenn es entdeckt worden ist?

5. Beweise oder widerlege:

   (a) Falls $P(A|B) \geq P(A)$, so ist $P(A|B) \geq P(B)$!

   (b) Falls $P(B|\overline{A}) = P(B|A)$, so sind A und B unabhängig!

   (c) Falls $a = P(A)$ und $b = P(B)$, so gilt $P(A|B) \geq \dfrac{a+b-1}{b}$!