Lehrstuhl für Rechnerorientierte Statistik und Datenanalyse, Prof. Antony R. Unwin
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Wahrscheinlichkeitstheorie
Übungsblatt 7

Abgabe: Mittwoch, 7.12.05, 14:00 Uhr, Briefkasten: Wahrscheinlichkeitstheorie.
Insgesamt können maximal 25 Punkte erreicht werden.

1. Assistent T. wohnt in M und arbeitet in H. Er beginnt um 8:30 Uhr morgens mit der Arbeit. Er nimmt jeden Morgen den Zug von M nach A, der in A laut Fahrplan um 8:10 Uhr ankommt. Dort fährt dann alle 15 min. eine Tram nach H ab. Die Tram, die um 8:15 Uhr in A startet, trifft laut Fahrplan um 8:26 Uhr in H ein. Die Verspätung des Zuges beträgt durchschnittlich 4 min. mit einer Standardabweichung von 2 min. Die Tram fährt immer pünktlich ab, erreicht H aber mit durchschnittlich 2 min. Verspätung und einer Standardabweichung von 4 min.
   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Assistent nach 8:30 Uhr in H ankommt?
   (b) Professor U. startet in A mit seinem Auto um 8:15 Uhr. Seine Fahrzeit nach H beträgt durchschnittlich 12 min. mit einer Standardabweichung von 3 min. Berechnen Sie die Wskt., dass
      i. Professor U. und Assistent T. beide nach 8:30 in H ankommen.
      ii. Professor U. vor Assistent T. das Büro in H erreicht.

2. Die Zeit X zwischen zwei e-mails ist exponentialverteilt mit Parameter μ.
   (a) Wie sieht die bedingte Verteilung aus, wenn die letzte e-mail vor s Minuten eingetroffen ist?
   (b) Wie sieht die bedingte Verteilung aus, wenn X mit Wahrscheinlichkeit p exponentialverteilt mit Parameter μ und mit Wahrscheinlichkeit $(1-p)$ exponentialverteilt mit Parameter λ ist?

3. Radargeräte sind mit einem zufälligen "Rauschpegel" behaftet, dessen Verteilung die Dichte
   $$f(x) = 2x \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \text{ für } x > 0$$
   besitzt. Falls der Rauschpegel größer als eine gewisse Konstante d ist, so werden Geräte in Kategorie 2 eingestuft, andernfalls in Kategorie 1.
   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Gerät der Kategorie 1 einen Rauschpegel kleiner als 2/3 d hat.
   (b) Bestimmen Sie eine Integralgleichung für d, so dass der durchschnittliche Rauschpegel in der Kategorie 1 um d Einheiten kleiner ist als der durchschnittliche Rauschpegel in Kategorie 2.

4. Alle guten Schachspieler bekommen einen Elo-wert. Diese Werte werden im Prinzip nach jedem Spiel neu berechnet. Die Theorie dahinter nahm früher an, dass jeder Spieler i eine Stärke μ_i hat und dass seine Leistung X_i in einem bestimmten Spiel als eine zufällig Stichprobe von $N(\mu_i, \sigma^2)$ angesehen werden kann. Die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler i Spieler j in einen Spiel schlägt, kann man von der Verteilung $X_i - X_j \sim N(\mu_i - \mu_j, 2\sigma^2)$ ablesen.

   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A mindestens zweimal in einem Jeder-gegen-jeden Turnier von 4 Spielern gewinnt, wenn $\mu_A = 2300, \mu_B = 2320, \mu_C = 2290, \mu_D = 2275$ und $\sigma^2 = 200$.

   Viele Schachspiele enden Remis. Wie könnte man das Modell ändern, um das einzuschließen.

5. Studenten schreiben eine Klausur. Nehmen wir an, dass die Leistung von jedem an einem bestimmten Tag normalverteilt $N(\mu, \sigma^2)$ ist. Um die Prüfung zu bestehen muss jemand mindestens m Punkte erreichen.
   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand die Prüfung besteht, obgleich seine erwartete Leistung μ kleiner als m ist $(= m - d)$?
   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand durchfällt, obgleich seine erwartete Leistung μ größer als m ist $(= m + d)$?
   (c) Plotten Sie diese Wahrscheinlichkeiten gegen μ für $m = 40$, und $\sigma^2 = 10$.