Lehrstuhl für Rechnerorientierte Statistik und Datenanalyse, Prof. Antony R. Unwin
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Wahrscheinlichkeitstheorie
Übungsblatt 8

Abgabe: Mittwoch, 14.12.05, 14:00 Uhr, Briefkasten: Wahrscheinlichkeitstheorie.
Insgesamt können maximal 25 Punkte erreicht werden.

1. Der nachfolgende stem-und-leaf Plot (siehe z.B. http://www.netmba.com/statistics/plot/stem/) stellt die Ergebnisse eines IQ-Tests, einer nicht weiter spezifizierten Population dar:

60	1
70	1, 5, 6, 7, 9
80	0, 0, 0, 0, 1, 2, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 8
90	0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 6, 6, 6, 6, 7 ,7, 8, 8, 8, 9
100	0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9
110	0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 7, 7, 8, 9, 9
120	0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 9
130	0, 0, 6
140	2, 6
150	2

   (a) Bestimmen Sie Mittelwert $\bar{x}$ und Standardabweichung s der Stichprobe.

   (b) Vergleichen Sie die tatsächlichen Häufigkeiten in den Intervallen $[\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s]$ und $[\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s]$ mit den Ergebnissen die Ihnen die Tschebyschew'sche Ungleichung liefert.

   (c) Nehmen wir $\bar{x}$ und s als Parameter μ und σ einer Normalverteilung an. Welche Wahrscheinlichkeiten erhalten wir nun für die Intervalle aus 1b, bei vorausgesetzter Normalverteilung?

2. Mit einem fairen Würfel werden 100 voneinander unabhängige Würfe durchgeführt. Man berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augensumme

   (a) zwischen 340 und 360 liegt.

      i. näherungsweise

      ii. exakt.

   (b) Man stelle die Ergebnisse aus (a) graphisch dar.

3. (a) Sei X Zufallsvariable und $r \in I\!N$. Man zeige: $E(|X|^r) < \infty \Rightarrow E(|X|^k) < \infty$ für alle $k \leq r$.

   (b) Sei $X \sim Bi(n, p)$. Es gelte weiter $(n + 1)p \in I\!N$. Man zeige: $P(X = x) = P(X = x - 1)$ für $x = (n + 1)p$.

   (c) Man bestimme die Menge aller Mediane der Verteilung mit der Dichte $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ für $x > 0$.

4. Eine völlig überarbeitete Ausgabe der "Encyclopedia of Statistical Sciences" wurde gesetzt. Sie hat nun 10.000 Seiten. Pro Seite sei die Anzahl der Fehler, die die Korrekturleser finden, unabhängig poisson-verteilt mit Parameter $\lambda = 0.5$.

   (a) Man bestimme "näherungsweise" die Wahrscheinlichkeit dafür, mehr als 4500 und weniger als 5500 Fehler zu finden, mit

      i. der Tschebyschew Ungleichung

      ii. dem zentralen Grenzwertsatz.

   (b) In welchem Intervall liegt "näherungsweise" mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% die Anzahl der gefundenen Fehler?

5. X und Y seinen unbahängig normal-verteilte Zufallsvariablen mit $X \sim N(a, \sigma^2)$ und $Y \sim N(b, \tau^2)$. Man bestimme die charakteristische Funktion von $X + Y$ und identifiziere die Verteilung.