



Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 10

Abgabe: Mittwoch, 25.1.06, 14:00 Uhr, Briefkasten: Wahrscheinlichkeitstheorie.
Insgesamt können maximal 25 Punkte erreicht werden.

- In einigen Sportarten wird der Gewinner aus zwei Teilnehmern entweder durch Bestleistung oder durch Paarvergleiche bestimmt. Nehmen wir an, dass die Leistungen von zwei Spielern beide unabhängig normalverteilt sind, $N(\mu_i, \sigma_i^2)$. Es werden n Versuche durchgeführt (n ungerade).
 - Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler 1 gewinnt, wenn nur die Bestleistung zählt?
 - Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler 1 gewinnt, wenn es um die meist gewonnenen Paarvergleiche geht? Vergleichen Sie Ihre Resultate für die Werte $n = 5$, $\mu_1 = 100$, $\mu_2 = 90$, $\sigma_1 = 5$, $\sigma_2 = 10$.
- Für eine unbekannte Verteilung existieren der Erwartungswert $E(X) = \mu$ und die Varianz $\text{var}(X) = \sigma^2$ und es gilt $E|X - \mu|^3 < 2\sigma^3$.
 - Wie groß muß eine Stichprobe sein, damit die Berry-Esséen Schranke für die Normalapproximation der Verteilung des Stichprobendurchschnitts kleiner oder gleich 0,05 ist?
 - Falls die Stichprobengröße 625 beträgt, geben Sie eine äußerste Schranke für die Wahrscheinlichkeit, daß der Stichprobendurchschnitt größer als $\mu + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{25}}$ ist. Vergleichen Sie dieses Resultat mit einer Anwendung der Tschebyschew Ungleichung in diesem Fall.
- Jeden Tag kontrolliert ein Zahnarzt ungefähr 500 Zähne. Ab und zu macht er einen Fehler und beurteilt einen kranken Zahn als gesund. Bei einer unabhängigen Untersuchung über eine Woche stellt sich heraus, daß der Zahnarzt 10 solche Fehler begangen hat. Deshalb ist folgendes Modell vorgeschlagen worden: die Anzahl der Fehler, die der Arzt bei der Untersuchung von N Zähnen macht, ist poissonverteilt mit Parameter $\lambda = N \cdot 10/2500$.
 - Was halten Sie von diesem Modell?
 - Würde dieses Modell auch für Fehler pro Woche gelten?
 - Würde es auch für einzelne Patienten gelten?
 - Angenommen das Modell stimmte, mit welcher Wahrscheinlichkeit würden wir genau 10 Fehler in einer Woche beobachten?
- Als angesehene/r Wissenschaftler/in sind Sie gebeten worden, dem Fernsehpublikum einige Wahrscheinlichkeitsaussagen zu erklären. Wie würden Sie die folgenden Aussagen erläutern:
 - Obwohl wir bereits letztes Jahr eine 'Jahrhundertflut' hatten, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß wir auch dieses Jahr von einer Flut betroffen werden, unverändert.
 - Der durchschnittliche Alkoholkonsum deutscher Bürger wird mit Hilfe einer Umfrage an 100 Menschen ermittelt. Würde die Umfrage bei 400 Menschen durchgeführt, so wären die Resultate zweimal, nicht viermal, besser.
 - Das starke Gesetz der großen Zahl besagt, daß wir, wenn wir einem Menschen genug Fragen stellen, im Durchschnitt nur dieselbe Antwort bekommen.
- Seien X und Y u.i.v. $N(2, 1)$. Erzeugen Sie eine Stichprobe der Größe 100 von (X, Y) und berechnen Sie $Z = \frac{X}{Y}$. Wie sieht die empirische Dichte von Z aus?
Vergleichen Sie die theoretische Wahrscheinlichkeit $P(Z < 0)$ mit Ihrem beobachteten Wert. Wie groß hätte die Stichprobe sein sollen, um eine "gute" Schätzung von $P(Z < 0)$ zu bekommen?