K2 Kombinatorik

(Abzählen der Fälle)

Annahme —

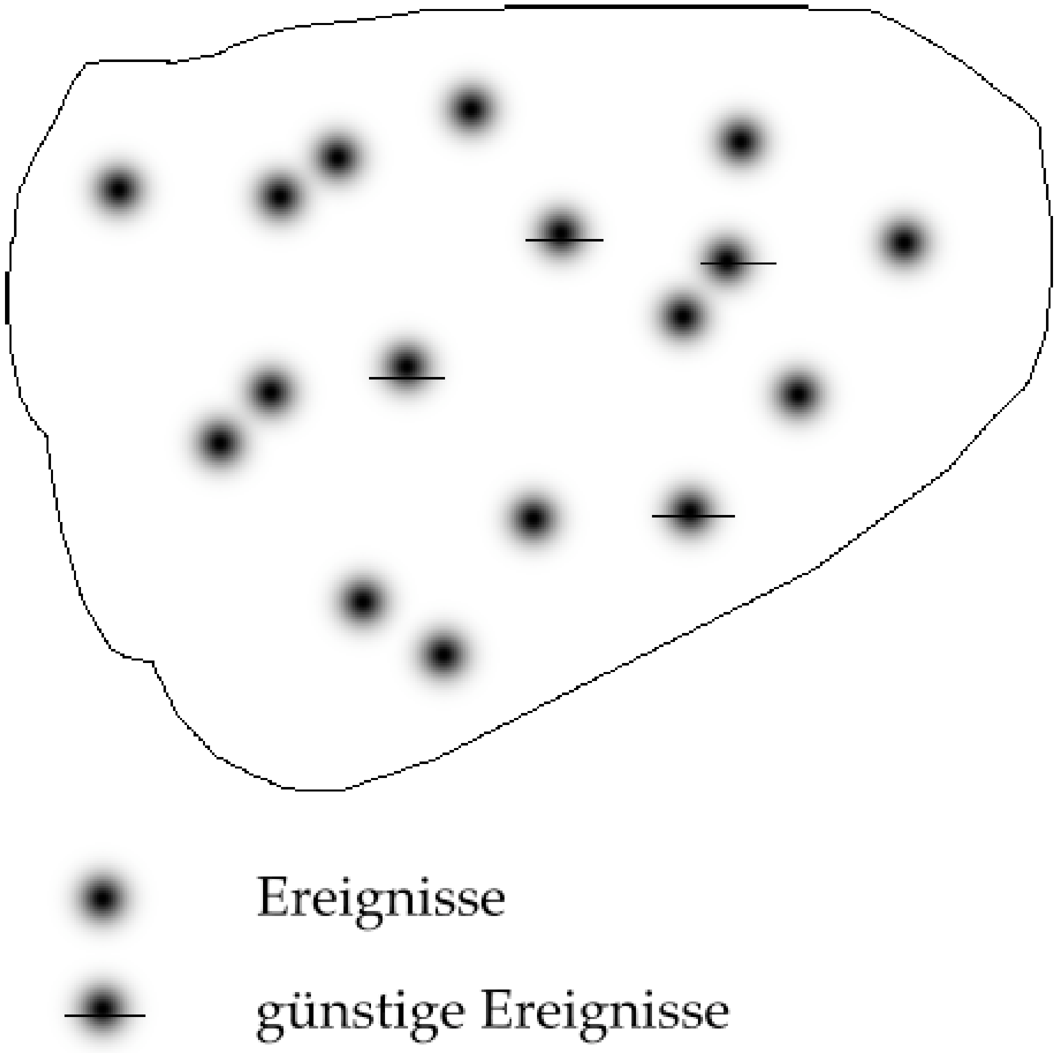
alle Ereignisse gleichwahrscheinlich

Dann können wir die Wahrscheinlichkeit eines Ausgangs als

$$\frac{\#(\text{„günstige“ Fälle})}{\#(\text{alle Fälle})}$$

bestimmen.

Dafür müssen wir wissen, wie man abzählt.



Wenn alle Ereignisse gleichwahrscheinlich sind, ist die Wahrscheinlichkeit eines günstigen Resultats:

2.1 Permutationen

Aus n verschiedenen Elementen kann man unter Berücksichtigung der Reihenfolge und ohne Rücklegung
k Stück ($1 \leq k \leq n$) auf

$$n.(n-1).(n-2)....(n-k+1) = n!/(n-k)! \qquad (2.1.1)$$

verschiedene Arten auswählen.

n Objekte, von denen n_1, n_2, n_3, ...n_r gleich sind, lassen sich auf

$$n!/(n_1!\, n_2!\, n_3! \ldots n_r!) \qquad (2.1.2)$$

verschiedene Arten anordnen.

Tennis Beispiel

Welche Reihenfolgen von Resultaten sind in einem Spiel aus fünf Sätzen möglich?

Das letzte Spiel muß gewonnen werden, die andern vier dürfen eine beliebige Reihenfolge haben. Es gibt

4!/(2! 2!) Anordnungen von 2 G und 2 V:

GGVVG
GVGVG
GVVGG
VGGVG
VGVGG
VVGGG

Wären alle in der Tat gleich wahrscheinlich?

2.2 Kombinationen

Aus n verschiedenen Elementen kann man ohne Berücksichtigung der Reihenfolge und ohne Rücklegung
k Stück ($1 \le k \le n$) auf

$$n!/[(n-k)!\,k!] \qquad (2.2.1)$$

verschiedene Arten auswählen., d.h.

$$\frac{\#\text{Permutationen}}{k!}$$

2.3 Kombinatorische Resultate

Stichproben
(n Kugeln aus einer Urne mit N Kugeln)

Verteilungen
(n Murmeln verteilt auf N Zellen)

Herzogin
(n Ringe auf N Finger angesteckt)

Eisenbahn
(n Wagen verteilt auf N Rangiergleisen)

Stichproben vom Umfang n aus N unterschiedlichen Kugeln

	mit	ohne
	Rücklegen	
in Reihenfolge	(2.3.1)	(2.3.2)
ohne Reihenfolge	(2.3.3)	(2.3.4)

Verteilungen von n Murmeln auf N Zellen

	mit	ohne
	Mehrfachbesetzung	
unterscheidbare Murmeln		
ununterscheidbare Murmeln		

Erklärung für (2.3.3)

Eine Stichprobe der Größe n wird aus N unterschiedlichen Kugeln mit Rücklegen gezogen (die Reihenfolge ist unwichtig).

oder

n identische Kugeln sollen auf N unteschiedliche Zellen verteilt werden.

Wieviele Möglichkeiten gibt es?

|000| |0| |00| |.......|0|

Die Anzahl der Anordnungen von n Kugeln (0) und (N-1) Striche (|), die internen Grenzen der N Zellen:

$$(N-1+n)!/[(N-1)!n!]$$

2.4 Kombinatorische Beispiele

2.4.1 Aus der statistischen Physik

Es gibt insgesamt n Teilchen, N Zellen und d Energieniveaus (N_j Zellen sind vom Energieniveau E_j).

Maxwell-Boltzmann Statistik

Beliebig viele Teilchen können in jeder Zelle auftreten und die Teilchen sind unterscheidbar.

$$P(k_1, k_2, k_3, \ldots k_d) = \tag{2.4.1}$$

Für „klassische" Teilchen wie Moleküle (aber Feller schreibt ......)

Fermi-Dirac Statistik

Es ist verboten, daß sich in einer Zelle zugleich zwei Teilchen aufhalten (Pauli-Verbot).

$$P(k_1, k_2, k_3, \ldots k_d) = \tag{2.4.2}$$

Für Elementarteilchen mit halbzahligem Spin wie Fermionen (einschließlich Elektronen, Protonen, Neutronen)

Bose-Einstein Statistik

Ununterscheidbare Teilchen.

$$P(k_1, k_2, k_3, \ldots k_d) = \tag{2.4.3}$$

Für Elementarteilchen mit ganzzahligem Spin, Bosonen (einschließlich Photonen und Mesonen)

2.4.2 Pokerspiel

5 Karten aus 52

Insgesamt gibt es

mögliche Blattkombinationen.

(a)
P(P-König, H-König, H3, Kr7, Ka2) =

(b)
P(P-König, H-König, ...) =

(einschließlich ein Blatt mit allen Königen)

(c)
P(mindestens 1 schwarzer K und 1 roter K)

{≠ P(genau 1 schwarzer K und 1 roter K)}

= P(genau 1 sK, 1 rK) + P(1 sK, 2 rK)
+ P(2 sK, 1 rK) + P(2 sK, 2 rK)

=

2.4.3 Runs

d Damen und h Herren sitzen in einer Reihe nebeneinander, z.B.

DHDDDDHHHHHHDHHD

Deutet diese Anordnung auf eine Tendenz hin, daß Nachbarn zum gleichen Geschlecht gehören? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit r D- und s H-runs anzutreffen?

Es gibt $(d+h)!/(d!h!)$ Anordnungen.
Es muß gelten $r-1 \leq s \leq r+1$.
Es gibt $(d-1)!/[(r-1)!(d-r)!]$ Möglichkeiten, die Längen der D-runs festzulegen (d Murmeln über r Zellen, so dass keine Zelle leer bleibt)
und $(h-1)!/[(s-1)!(h-s)!]$ für die H-runs.
Im Fall $r = s$ muß man mit 2 multiplizieren.

2.5 W-Theorie und Kombinatorik

2.5.1 Prozedur

Raum der möglichen Ereignisse bestimmen:

— mit / ohne Rücklegen

— Unterscheidbarkeit
(von Objekten, Zellen....)

— Reihenfolgen

Sind alle Ereignisse gleichwahrscheinlich, dürfen wir kombinatorische Methoden anwenden.

Abzählen der Ergeignisse insgesamt
Abzählen der „günstigen" Ereignisse

2.5.2 Anwendung und Interpretation

In der Kombinatorik gibt es viele interessante (und manchmal trickreiche) Fragestellungen.

z.B.

(1) Auf wieviele Weisen können m Ehepaare um einen Tisch sitzen, so dass jede Frau zwischen zwei Männern sitzt und nicht neben Ihrem Mann?

(2) Zwei Kartenspiele werden getrennt gemischt. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Karte dieselbe Position in beiden Spielen besetzt?

Seitens der Wahrscheinlichkeitstheorie sind die Annahmen und die Interpretationen am wichtigsten.