

## K3 (Diskrete) Zufallsvariablen

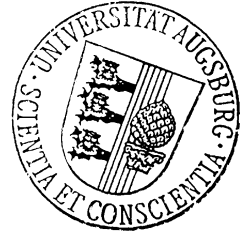
### 3.1 Basis

$\Omega = \{\omega\}$ ,  $X(\omega)$  ist eine Größe die durch  $\omega$  bestimmt ist. Bei der zufälligen Auswahl von  $\omega$  bekommen wir den Wert,  $X(\omega)$ .

Definition: Ist  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $X$  eine beliebige Menge, so nennen wir eine Abbildung  
 $X: \Omega \rightarrow X$  eine  $X$ -wertige Zufallsvariable

Falls  $\Omega$  abzählbar ist, wird der Wertebereich von  $X$ ,  $\{X(\omega): \omega \in \Omega\}$  auch abzählbar sein. Die Verteilung von  $X$  ist das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$P_X(x) = P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) = x\})$$



## 3.2 Erwartungswerte

Die Erwartung einer reellwertigen Zufallsvariablen  $X$  existiert wenn  $\sum |X(\omega)| P(\omega)$  konvergiert. Wir definieren dann

$$E[X] = \sum X(\omega)P(\omega)$$

als den Erwartungswert von  $X$

Ist  $x_1, x_2, x_3, \dots$  eine Abzählung des Wertebereichs von  $X$ , so ist

$$E[X] = \sum x_i P(X = x_i)$$

Eigenschaften:

(1)  $E[X+a] = E[X] + a$

(2)  $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$

(3)  $E[aX] = aE[X]$

(4) sind  $X, Y$  unabhängig:

$$E[X*Y] = E[X]*E[Y]$$

(5)  $E[f(X)] \neq f(E[X])$



### 3.2.1 Warum brauchen wir Konvergenz?

(Das Paradox von St. Petersburg)

Man wirft eine Münze bis Kopf auftritt.  
Wenn das zum ersten Mal mit dem  $r$ .ten  
Wurf geschieht, gewinnt man

$$€ 2^r$$

Nehmen wir an, daß  $P(\text{Kopf}) = p$

$$\begin{aligned} E[\text{Gewinn}] &= \sum_{r=1}^{\infty} 2^r p (1-p)^{r-1} \\ &= 2p \sum_{r=1}^{\infty} (2q)^{r-1} \\ &= 2p \sum_{r=0}^{\infty} (2q)^r \\ &= 2p / (1 - 2q) \quad \text{für } 2q < 1 \\ &\quad \text{sonst } \infty \end{aligned}$$



### 3.3 Verteilungen auf den Ganzzahlen

$$\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$P(X = k) = p_k$$

Man interessiert sich insbesondere für

$$P(X = 0) = p_0$$

$$P(X \geq k) = \sum_{i \geq k} p_i$$

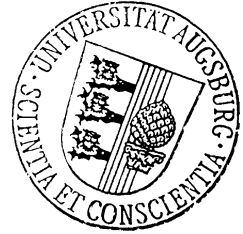
$$P(X = r \mid X \geq k) = p_r / \sum_{i \geq k} p_i$$

$$P(j \leq X \leq k) = \sum_{i=j}^k p_i$$

$$E[X] = \sum i p_i \text{ (arithmetisches Mittel)}$$

$$V[X] = \sum (i - E[X])^2 p_i$$

Standardabweichung von  $X = \sqrt{V[X]}$



z.B.

| <b>k</b> | <b>p<sub>k</sub></b> |
|----------|----------------------|
| 0        | 0.2                  |
| 1        | 0.4                  |
| 2        | 0.3                  |
| 3        | 0.1                  |
| ≥4       | 0.0                  |

$$P(X = 0) =$$

$$P(X \geq 2) =$$

$$P(X = 3 \mid X \geq 2) =$$

$$P(1 \leq X \leq 2) =$$

$$E[X] =$$

$$V[X] =$$



### 3.4 Hypergeometrische Verteilung

Eine Urne enthält  
 $S$  schwarze und  $W$  weiße Kugeln.

Es werden  $n \leq S + W$  Kugeln ohne  
Rücklegen gezogen.

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Stichprobe  
genau  $s$  schwarze Kugel enthält ist

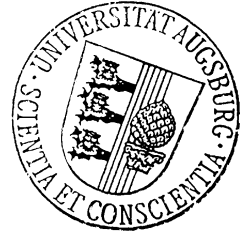
$$h(s; n, N, S) =$$

wo

$$N = S + W, n = s + w \text{ und } 0 \leq s \leq \min(n, S)$$

Für eine Urne mit mehreren Farben, z. B.  
 $S$  schwarze,  $W$  weiße,  $R$  rote,  $B$  blaue Kugeln  
gilt:

$$P(s, w, r, b) =$$



### 3.5 Produktexperimente

Wir haben eine Reihe von unabhängigen Experimenten  $\{1, 2, 3, \dots, i, \dots\}$  mit Modellen  $(\Omega_i, F_i, P_i)$ . Das Gesamtergebnis hat einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, F, P)$  mit

$$\Omega = \prod \Omega_i, F = \prod F_i, P = \prod P_i$$

das Produkt der Wahrscheinlichkeitsräume

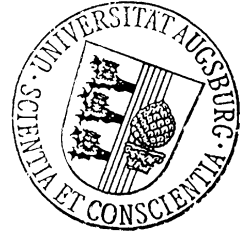
Man zieht z.B. 4 Kugeln hintereinander aus einer Urne mit 10 schwarze Kugeln und 20 weiße Kugeln.

(a) mit Rücklegen

alle 4 Experimente haben denselben Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega_i, F_i, P_i)$

(b) ohne Rücklegen

das Resultat der zweiten Ziehung ist vom Resultat der ersten abhängig und somit ist  $(\Omega_2, F_2, P_2)$  im voraus nicht bestimmbar.



## Produktexperimente — Beispiele

### Geometrische Verteilung

In jedem Experiment gibt es zwei mögliche Ausgänge,  $\{1, 0\}$  mit Wahrscheinlichkeiten  $p$  bzw.  $q$  ( $= 1-p$ ).

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß  $k$  Nullen vor dem ersten Einsen auftreten?

$$p_k = pq^k \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

### Binomiale Verteilung

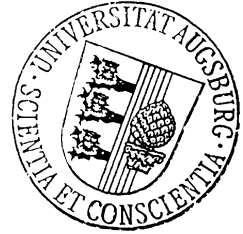
Es gibt genau  $N$  der obigen Experimente. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man  $k$  Einsen bekommt?

$$\left[ \frac{N!}{k! (N - k)!} \right] p^k (1 - p)^{N-k}$$

### Negative Binomiale Verteilung

Es gibt keine Begrenzung der Zahl der Experimente. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man  $k$  Nullen vor dem  $r$ .ten Einsen bekommt?

$$\left[ \frac{(k + r - 1)!}{k! (r - 1)!} \right] p^r (1 - p)^k$$



## 3.6 Geometrische Verteilung

### 3.6.1 Formeln

$$p_k = pq^k \quad (q = 1 - p) \quad (3.6.1)$$

$$p_0 = p$$

$$P(X \geq k) = \sum_{i \geq k} p_i = pq^k \sum_{i \geq 0} q^i = q^k$$

$$P(X = r \mid X \geq k) = p_r / \sum_{i \geq k} p_i = pq^{r-k}$$

$$P(j \leq X \leq k) = \sum_{i=j}^k p_i = q^j (1 - q^{k-j})$$

$$E[X] = \sum_{i \geq 0} ip_i = pq \sum_{i \geq 1} iq^{i-1} = q/p$$

$$V[X] = \sum_{i \geq 0} (i - E[X])^2 p_i = q/p^2$$



## 3.6.2 Anwendungen — Geometrische Verteilung

### 1) Zuverlässigkeitsmodelle

Wieviele Backups?

$$P(\text{Absturz}) = p$$

$$P(k \text{ stürzen ab}) = p^k$$

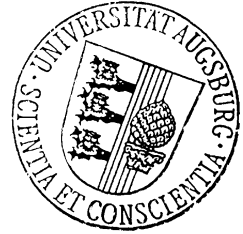
Unabhängigkeit ist eine wichtige Annahme

### 2) „Coupons“ Problem

$$P(\text{man bekommt den seltenen Fall}) = p$$

$$P(k + 1 \text{ kaufen müssen}) = q^k p$$

### 3) Zeit zum ersten Erfolg



## 3.7 Binomialverteilung $B(N, p)$

### 3.7.1 Formeln

$$p_k = N! / (k! (N-k)!) p^k q^{N-k} \quad (3.7.1)$$

$$p_0 = q^N$$

$$P(X \geq k) = \sum_{i \geq k} p_i$$

$$P(X = r \mid X \geq k) = p_r / \sum_{i \geq k} p_i$$

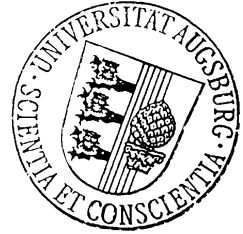
$$P(j \leq X \leq k) = \sum_{i=j}^k p_i$$

$$E[X] = \sum_{i \geq 0} i p_i = Np$$

$$V[X] = \sum_{i \geq 0} (i - E[X])^2 p_i = Npq$$

(Bernoulli Experimente)

Für  $N$  unabhängige Zufallsvariablen  $\{X_i\}$ ,  
wo  $P(X_i = 1) = p$  und  $P(X_i = 0) = 1 - p$ ,  
hat  $X = \sum X_i$  eine Binomialverteilung.



### 3.7.2 Anwendungen — Binomialverteilung

#### 1) Qualitätskontrolle

Stichproben der Größe  $N$ . Jedes Produkt hat die gleiche Wahrscheinlichkeit,  $p$ , fehlerhaft zu sein.

#### 2) „Multiple Choice“

$N$  Fragen

$r$  Antworten pro Frage  $P(\text{richtig}) = 1/r$

Die Verteilung der #(richtige Antworten)

$$B(N, 1/r)$$

#### 3) „ESP“

$N$  Versuche  $p = P(\text{richtig})$

$$P(X \geq k) = \sum_{i=k}^N \frac{N!}{[i!(N-i)!]} p^i q^{N-i} = g_k$$

$M$  Personen  $p = g_k$

$$P(\text{mehr als } K \text{ Personen } \geq k \text{ richtig haben}) = \sum_{j>K}^M \frac{M!}{[j!(M-j)!]} g_k^j (1 - g_k)^{M-j}$$



## 3.8 Negative Binomialverteilung

### 3.8.1 Formeln

$$p_k = (r + k - 1)! / (k! (r - 1)!) p^r q^k$$

$k = 0, 1, 2, \dots$

$$p_0 = p^r$$

$$P(X \geq k) = \sum_{i \geq k} p_i$$

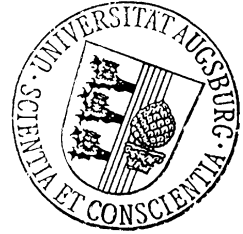
$$P(X = r \mid X \geq k) = p_r / \sum_{i \geq k} p_i$$

$$P(j \leq X \leq k) = \sum_{i=j}^k p_i$$

$$E[X] = \sum_{i \geq 0} i p_i = r q / p$$

$$V[X] = \sum_{i \geq 0} (i - E[X])^2 p_i = r q / p^2$$

(Die Summe von  $r$  geometrischverteilte Zufallsvariablen)



## **3.8.2 Anwendungen — negative Binomialverteilung**

- 1) Anzahl Tore im Sport
- 2) Einkäufe eines Produkts
- 3) Unfallstatistiken