

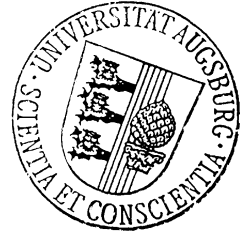
# W-Theorie (Bis jetzt)

Einführung  
— Beispiele

Was ist Wahrscheinlichkeit?  
— Axiome und Interpretation  
— Unabhängigkeit

Kombinatorik  
— Permutationen und Kombinationen  
— Stichproben (Urnen)  
— Verteilungen (Zellen)  
— Runs

Diskrete Zufallsvariablen  
Erwartungswerte  
Diskrete Verteilungen  
— Hypergeometrische  
— Geometrische  
— Binomial



## 3.9 Poisson Verteilung

### 3.9.1 Formeln

$$p_k = e^{-\lambda} \lambda^k / k! \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.9.1)$$

$$p_0 = e^{-\lambda}$$

$$P(X \geq k) = e^{-\lambda} \sum_{i \geq k} \lambda^i / i! = \Gamma_k(\lambda) \quad (*)$$

$$P(X = r \mid X \geq k) = p_r / \sum_{i \geq k} p_i$$

$$P(j \leq X \leq k) = \Gamma_j(\lambda) - \Gamma_{k+1}(\lambda)$$

$$E[X] = \lambda$$

$$V[X] = \lambda$$

$$(*) \quad \Gamma_k(\lambda) = \int_0^\lambda e^{-t} t^{k-1} dt / (k-1)!$$

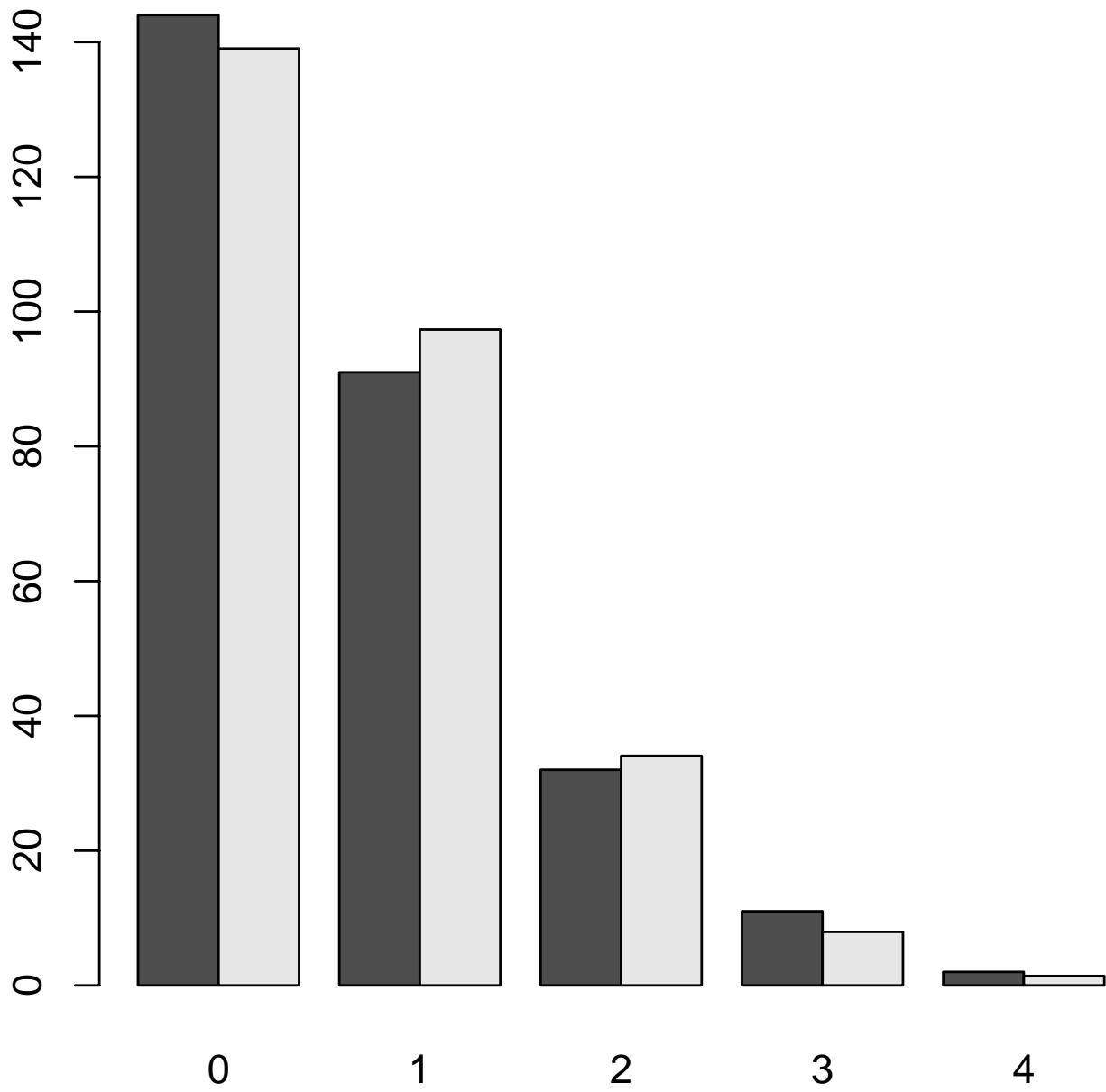
$\gamma(k, \lambda) = \int_0^\lambda e^{-t} t^{k-1} dt$  ist die (untere) unvollständige Gammafunktion



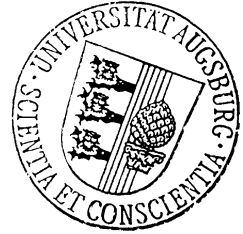
### 3.9.2 Anwendungen — Poisson Verteilung

- 1) # Unfälle —  
z.B. Todesfälle nach Huftritte von  
Pferden in der preußischen Armee  
14 Korps 1875-1894 196 Todesfälle  
*Das Gesetz der kleinen Zahlen*  
L. von Bortkewitsch (Teubner 1898)
- 2) # Fehler — z.B. Tippfehler
- 3) Tore im Sport (?)
- 4) Bombenverteilung in London  
(Feller s. 160)
- 5) # Anrufe

## Tod nach Huftritt von Pferden



Beobachtet und Fitted



### Beispiel 3.9.2 (4) Bomben in London (V1 und V2)

Das Gebiet von Süd-London wird in 576 kleinere Gebiete von je  $0.25 \text{ km}^2$  aufgeteilt. Die Tabelle zeigt die Anzahl Gebiete  $N_k$ , in denen genau  $k$  Bomben gefallen sind.

<b>k</b>	<b><math>N_k</math></b>	<b>Poisson(k; 0.9323)</b>
0	229	226.74
1	211	211.39
2	93	98.54
3	35	30.62
4	7	7.14
$\geq 5$	1	1.57

$\lambda$  wird durch  $537 / 576$  geschätzt.

Wie soll man dieses Resultat deuten?



Eine wichtige Begründung in vielen Anwendungen ist die folgende Eigenschaft der Poisson Verteilung:

### **Satz 3.9.2**

$X, Y$  Poissonverteilte ZV mit Parametern  $\lambda_1, \lambda_2$

$$X \sim P(\lambda_1) \text{ und } Y \sim P(\lambda_2)$$

$X, Y$  unabhängig  $\Rightarrow X+Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$

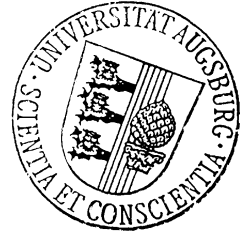
### **Beweis**

Entweder mit

(a) Faltung

oder

(b) Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktionen



### 3.9.3 Die Poisson Verteilung als eine Approximation für die Binomialverteilung

$$X \sim B(N, p)$$

$$P(X=k) = N! / [k!(N-k)!] p^k (1-p)^{N-k}$$

Sei  $Np = \lambda$ , dann ist  $X \sim B(N, \lambda/N)$

$$\begin{aligned} P(X=k) &= {}^N C_k (\lambda/N)^k (1-\lambda/N)^N (1-\lambda/N)^{-k} \\ &= \end{aligned}$$

Für  $N \rightarrow \infty$  und  $\lambda$  konstant, gilt

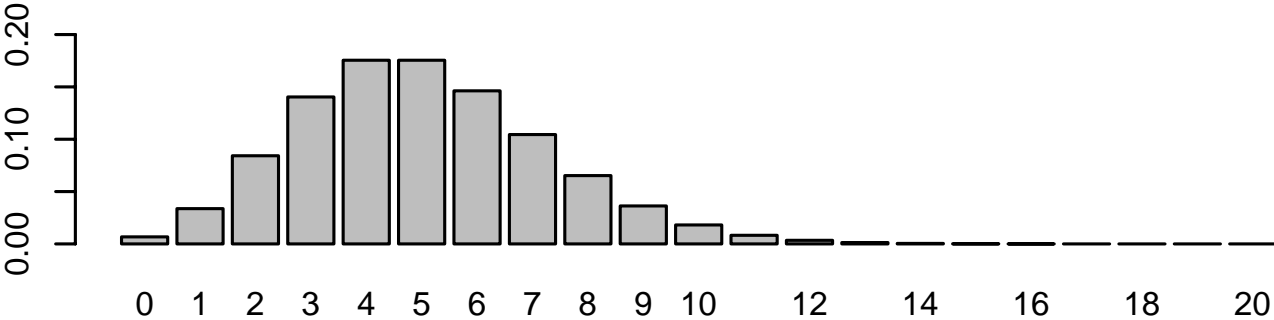
$$P(X=k) \rightarrow \lambda^k / k! e^{-\lambda}$$

eine Poisson Verteilung

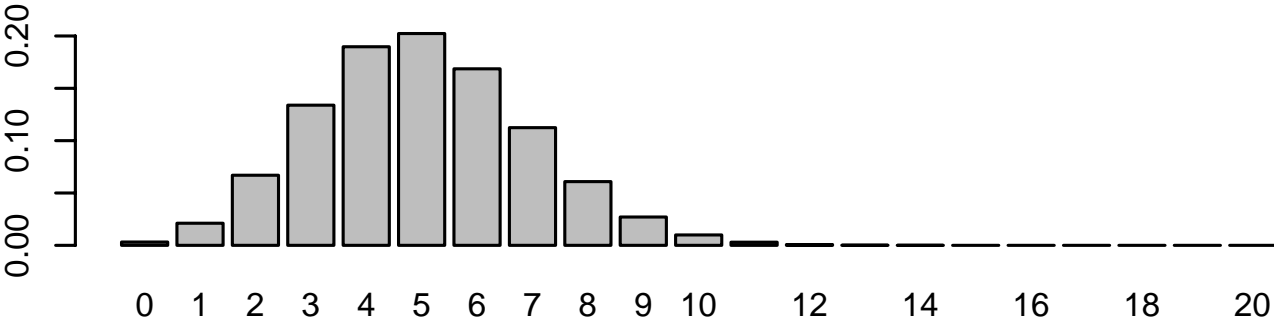
Man findet auch

„Für  $N \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow 0$  unter der Bedingung, daß  $Np \rightarrow \lambda$ , ist  $P(Np)$  eine gute Approximation für  $B(N, p)$ .“

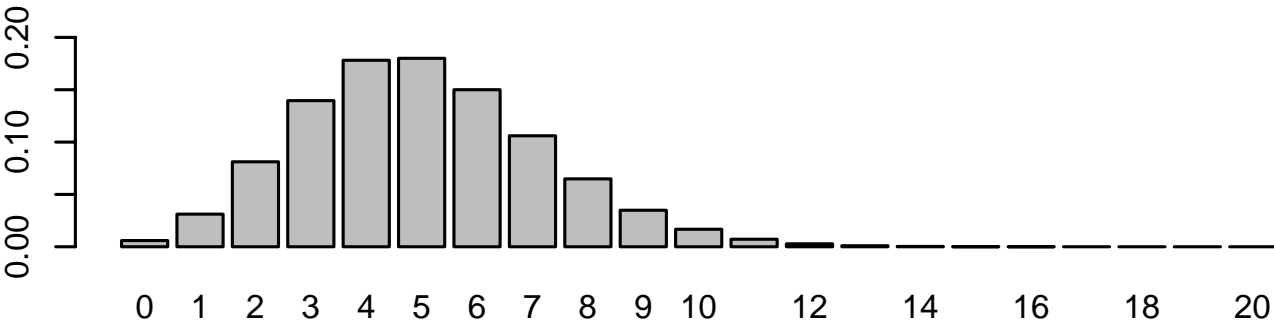
**Poisson(5)**

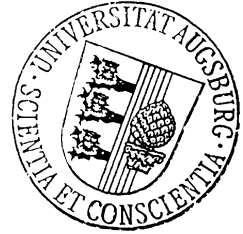


**Binomial(20, 0.25)**



**Binomial(100, 0.05)**





### 3.9.4 Die Poisson Verteilung ist die Zufallsverteilung

Sei  $p_1(i) = P(i \text{ Ereignisse im Zeitintervall } t_1)$

$p_2(j) = P(j \text{ Ereignisse im Zeitintervall } t_2)$

wo  $t_1 \cap t_2 = \emptyset$  und

$p_0(n) = P(n \text{ Ereignisse im } t_0 = t_1 \cup t_2)$

Dann  $p_0(n) = \sum_{i=0}^n p_1(i) \cdot p_2(n-i)$

Wir möchten, daß die Verteilungen  $\{p_k(i)\}$  alle dieselbe Form haben.

Wir nehmen an, daß die Ereignisse rein zufällig und unabhängig von einander sind.

$\Rightarrow$  Die Wahrscheinlichkeit ein Ereignis in  $t_1$  fällt, gegeben, daß es in  $t_0 = t_1 \cup t_2$  fällt, ist



$$\alpha = t_1 / t_0$$

Dann gilt

$$p_1(i)^* p_2(n-i) = {}^n C_i \alpha^i (1-\alpha)^{(n-i)} p_0(n)$$

Insbesondere haben wir

$$p_1(n)^* p_2(0) = \alpha^n p_0(n) \quad (=> p_2(0) > 0)$$

und

$$p_1(n-1)^* p_2(1) = n \alpha^{n-1} (1-\alpha) p_0(n)$$

$$p_1(n) / p_1(n-1) = [p_2(1) / p_2(0)] [\alpha / (1-\alpha)] / n$$

Für  $n = 1$

$$[p_1(1) / p_1(0)] / \alpha = [p_2(1) / p_2(0)] / (1-\alpha) = c$$

$$\Rightarrow p_1(n) / p_1(n-1) = \alpha c / n$$

$$p_1(n) = (\alpha c)^n / n! p_1(0)$$

eine Poisson Verteilung mit  $\lambda = \alpha c$