3.9.5 Noch zwei Poisson Beispiele

(a) Geburtstage
Gegeben 80 Studenten, wieviele haben heute Geburtstag?
Als Approximation nehmen wir:

$$X \sim P(80/365)$$

P(mindestens 1 Geburtstag) $\approx 1 - 0.803$

(b) Lotto
Wieviele Gewinner im Lotto?

P(Größter Gewinn) = ${}^{49}C_6$*0.1
Gegeben N=100,000,000 Tipps, die alle zufällig ausgewählt werden, modellieren wir # Gewinner mit

$$X \sim P(0.715112)$$

X	0	1	2	≥3
P(X)	0.489	0.350	0.125	0.036

K4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

4.1 Definition

Die bedingte Wahrscheinlichkeit von A bei gegebenem B:

$$P(A \mid B) = P(A \cap B) / P(B) \qquad (4.1.1)$$

Meistens benutzen wir die Gleichung in der Form:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) * P(B)$$

weil $P(A \cap B)$ schwer zu berechnen ist.

z.B. Lebensdauer

p_k = P(jemand im k.ten Lebensjahr stirbt)
unabhängig von seinem Geburtsjahr

P(jemand das k.te Jahr erreicht)

$$s_k = p_k + p_{k+1} + \; .....$$

P(im Alter von r zu sterben, wenn man schon k erreicht hat) $= 0 \qquad r < k$

$$= p_r / s_k \qquad r \geq k$$

z.B. Lotto

Angenommen # Gewinner, $X \sim P(\lambda)$

(i) Gegeben, dass der Jackpot gewonnen wird, was ist die Wahrscheinlichkeit, dass er geteilt wird?

$$P(X > 1 \mid X > 0) = (1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}) / (1 - e^{-\lambda})$$

(ii) Gegeben, dass ich den Jackpot gewonnen habe, was ist die Wahrscheinlichkeit, dass ich ihn teilen muss?

Sei p = P(ich gewinne den Jackpot)

$$P(\text{ich und x andere gewinnen}) = p^* \lambda^x e^{-\lambda} / x!$$

$$\Rightarrow P(\text{x andere gewinnen} \mid \text{ich}) = \lambda^x e^{-\lambda} / x!$$

$$\Rightarrow P(\text{ich den Jackpot teilen muss}) = 1 - e^{-\lambda}$$

4.2 Formel von Bayes

(1) Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit

$\{B_1, B_2, B_3, \ldots\}$ heißt Zerlegung von Ω, wenn die B_i disjunkt sind, und ihre Vereinigung Ω ist.

Für jede Zerlegung und jedes Ereignis A gilt

$$P(A) = \sum P(B_k) * P(A \mid B_k) \qquad (4.2.1)$$

(Ist $P(B_k) = 0$, so ist $P(A \mid B_k)$ nicht definiert aber das Produkt kann = 0 gesetzt werden.)

(2) Bayes

Gilt $P(A) > 0$, und gelten alle Voraussetzungen von (1), so ist für alle i

$$P(B_i \mid A) = P(B_i) * P(A \mid B_i) / \sum P(B_k) * P(A \mid B_k) \qquad (4.2.2)$$

Beweis von (4.2.2) (Bayes Formel)

$$P(A \cap B_i) = P(A \mid B_i) * P(B_i)$$
$$= P(B_i \mid A) * P(A)$$

=>

$$P(B_i \mid A) = P(B_i) * P(A \mid B_i) / P(A)$$

$$= P(B_i) * P(A \mid B_i) / \sum P(B_k) * P(A \mid B_k)$$

$\{P(B_i)\}$ sind die apriori Wahrscheinlichkeiten

$\{P(B_i \mid A)\}$ die aposteriori Wahrscheinlichkeiten

Mit Bayes werden Wahrscheinlichkeiten berechnet.
Das erlaubt aber keinen Rückschluss auf etwaige Kausalzusammenhänge zwischen den Ereignissen.

4.3.1 Beispiel mit Bayes (Autoversicherung)

Drei Gruppen:

Gut	G
Mittelmäßig	M
Schlecht	S

Nehmen wir an, dass

$$P(\text{Unfall im Jahr} \mid G) = 0.01$$
$$P(\text{Unfall im Jahr} \mid M) = 0.03$$
$$P(\text{Unfall im Jahr} \mid S) = 0.10$$

und $P(G) = 0.3$, $P(M) = 0.5$, $P(S) = 0.2$

Jemand hat im Jahr einen Unfall, wie sehen die aposteriori Wahrscheinlichkeiten aus?

$P(S \mid \text{Unfall}) = 0.5263$
$[= (0.2*0.1)/(0.2*0.1+0.5*0.03+0.3*0.01)]$

4.3.2 Beispiel mit Bayes (Sport-Kommentatoren)

„Bayern gewinnt, wenn Makaay ein Tor schießt“

Nehmen wir an, dass

$$\begin{aligned} P(\text{Bayern gewinnt}) &= 0.8 \\ P(\text{Bayern gewinnt} \mid \text{Makaay Tor}) &= 0.9 \\ P(\text{Makaay Tor}) &= 0.4 \end{aligned}$$

Dann

$P(\text{Makaay Tor} \mid \text{Bayern gewinnt}) =$

4.3.3 Beispiel mit Bayes (Das Auto und Ziegen Problem)

Es gibt drei Türe: A, B, und C. Hinter einer Tür steht ein Auto und hinter den anderen zwei steht je eine Ziege. Sie wählen eine Tür aus. Bevor der Moderator die Tür öffnet, öffnet er eine der anderen, um eine Ziege zu zeigen. „Gut, dass Sie diese Tür nicht gewählt haben!“ sagt er. Jetzt bietet er Ihnen, die Möglichkeit, Ihre Tür zu wechseln, sollten Sie?

o.B.d.A. wählen Sie zuerst Tür A.
P(Auto hinter Tür A steht) = 1/3

Der Moderator öffnet Tür B. Was ist
P(Auto hinter A | A gewählt, B geöffnet)?

$= (1/3)*(1/2)/[\ (1/3)*(1/2)+ (1/3)*1]$

4.4 Genetische Anwendungen

4.4.1 Hardy-Weinberg Gesetz

„In einer idealen Population ändert sich die Häufigkeit der Gene nicht, wenn keine äußerer Einfluss wie Migration, Selektion oder Mutation einwirkt. Die Allelfrequenzen bleiben konstant.“
(Die Population ist sehr groß und alle Paarungen müssen sind gleich wahrscheinlich und gleich erfolgreich.)

Wenn die Genotypen AA, Aa, aa mit diesen Häufigkeiten vorhanden sind:

AA	Aa	aa
u	$2v$	w

$$(u, v, w > 0 \text{ und } u + 2v + w = 1)$$

gibt es im „Genpool”

$$p = (u + v) \quad \text{A Gene}$$

und

$$q = (v + w) \quad \text{a Gene}$$

Wir behaupten, daß jedes Kind ein Gen vom männlichen Genpool und ein Gen vom weiblichen zufällig bekommt. Dann hat ein Kind die Genotypen mit Wahrscheinlichkeiten:

AA	Aa	aa
p^2	$2pq$	q^2

oder

$$(u + v)^2 \quad 2(u + v)(v + w) \quad (v + w)^2$$

Sonst finden wir die Wahrscheinlichkeiten von Eltern und Nachkommen als:

Vater	Mutter	W	P(AA)	P(Aa)	P(aa)
AA	AA	u^2	1	0	0
AA	Aa	2uv	1/2	1/2	0
AA	aa	uw	0	1	0
Aa	AA	2uv	1/2	1/2	0
Aa	Aa	$4v^2$	1/4	1/2	1/4
Aa	aa	2vw	0	1/2	1/2
aa	AA	uw	0	1	0
aa	Aa	2vw	0	1/2	1/2
aa	aa	v^2	0	0	1

Nehmen wir an,

$u_i \;= P(AA)$ in der i-ten Generation

$2v_i = P(Aa)$ in der i-ten Generation

$w_i \;= P(aa)$ in der i-ten Generation

$u_0 = u \qquad v_0 = v \qquad w_0 = w$

$u_1 = (u + v)^2 \quad 2v_1 = 2(u + v)(v + w)$

$w_1 = (v + w)^2$

Die Wahrscheinlichkeiten für ein Kind in der nächsten Generation werden:

$$\begin{aligned} u_2 &= (u_1 + v_1)^2 = ((u + v)^2 + (u + v)(v + w))^2 \\ &= (u + v)^2(u + v + v + w)^2 \\ &= (u + v)^2 \\ &= u_1 \end{aligned}$$

und

$$u_n = u_1 \qquad v_n = v_1 \qquad w_n = w_1 \quad \forall\, n$$

eine stationäre Verteilung.

(Zur Errinerung, die Annahmen :
große Population, keine Migration,
keine Mutationen, keine Selektion,
gleiche Paarungschancen)

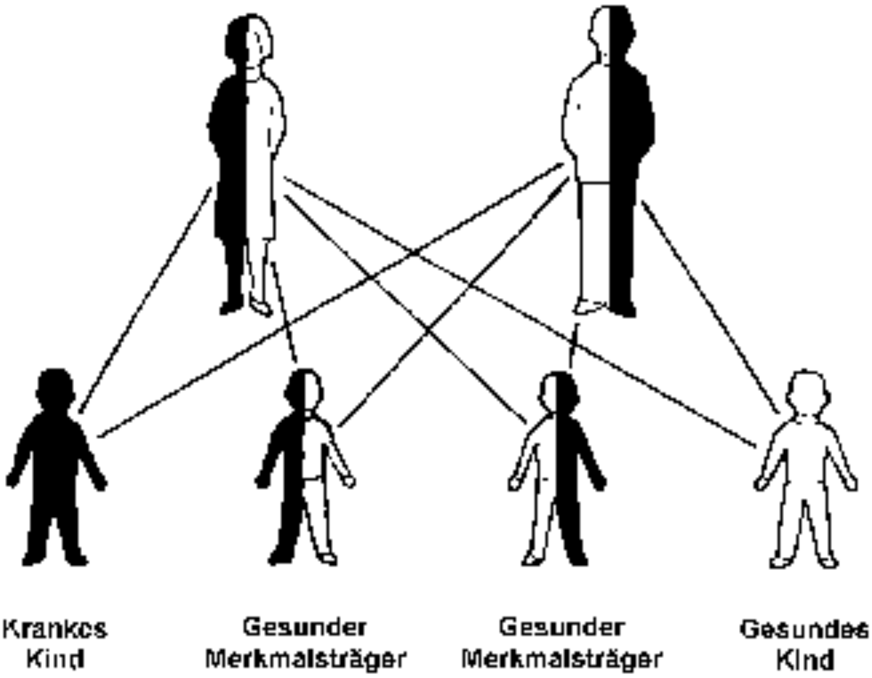
4.4.2 Hardy-Weinberg Beispiele

1) Seltene rezessive Gene

Phänotypen (AA, Aa) und (aa)
z. B. cystic fibrosis
P(Kind hat die Krankheit) = 0.0005
P(a) = √(0.0005) = 0.022
P(Aa) = 2*0.022*0.978 = 0.044
(4.4% der Bevölkerung)

Mukoviszidose (Cystische Fibrose)
Die Mukoviszidose ist eine Erbkrankheit. Sie ist durch eine Veränderung (Gen-Mutation) auf dem langen Arm des Chromosoms 7 verankert. Bis heute kennt man schon über 800 Mutationen, die zu Mukoviszidose führen.

4 % in Deutschland sind Merkmalsträger
1 von 3000 Neugeborenen Mukoviszidose
5 000 Mukoviszidose-Patienten hier



Wenn beide die Erbanlage für Mukoviszidose haben, ist theoretisch jedes 4. Kind an Mukoviszidose erkrankt und 50 % der Kinder sind - wie die Eltern - Merkmalsträger, aber gesund. In Wirklichkeit kann es aber vorkommen, daß in einer Familie die Anzahl der Kinder mit Mukoviszidose überwiegt (z.B. 2 kranke Kinder, 1 gesundes Kind).

www.uniklinikum-giessen.de/pneumologie/Vererbung.html

(a) Hardy-Weinberg
(i) Sind die Daten mit H-W konsistent?

(ii) Stimmen die H-W Annahmen?

(b) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie einen Merkmalsträger sind, eine Merkmalsträgerin heiraten und zwei Kinder ohne der Krankheit haben?

(c) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Frau und ein Mann hier Merkmalsträger sind?

(d) Gegeben, dass Sie ein Kind mit der Krankheit haben, was ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ihre Eltern Träger waren?

2) Dominante Gene
Phänotypen (AA, Aa) und (aa)
z. B. Fähigkeit PTC zu kosten
P(in USA 1932, PTC) = 0.702
$\Rightarrow q = P(a) = \sqrt{1 - 0.702} = 0.546$
(immer noch c 70% s. z.B. 75% in extension.usu.edu/aitc/teachers/pdf/heredity/comparing_traits.pdf)

Phenyl**t**hio**c**arbamid; ein experimenteller Tyrosinase-Hemmstoff. Der **PTC-Geschmackstest** prüft die – z.B. bei ca. 70% der Europäer – genetisch fixierte Fähigkeit, PTC als bitter zu empfinden.
www.gesundheit.de/roche/ro30000/r32021.html

3) Co-dominante Gene
Phänotypen AA, Aa, aa
z. B. Blutgruppe MN
mit Phänotypen M, MN, N
Britische Stichprobe (?) in 1962:

M	MN	N
363	634	282
28.38%	49.57%	22.05%

$$\Rightarrow \quad p = (363 + 634/2)/(363 + 634 + 282)$$
$$= 53.17\%$$

$$\Rightarrow \quad u = p^2 = 28.27\%$$

$$w = q^2 = 21.93\%$$

$$2v = 1 - u - w = 49.80\%$$

HW => $u = (u + v)^2$
oder $u = 0.5 - v \pm 0.5\sqrt{(1-4v)}$