K5 Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktionen (WEF)

5.1 Defintion

Sei X eine Zufallsvariable auf $\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, ...\}$ dann ist der Erwartungswert der Funktion z^X

$$E[z^X] = \sum_{x=0}^{\infty} z^x p_x \tag{1}$$

[wo $p_x = P(X = x)$]

$$g_X(z) = E[z^X]$$

ist die WEF von X für $0 \leq z \leq 1$

WEF genannt, weil p_x der Koeffizient von z^x in $g_X(z)$ ist.

Die WEF ist eine Potenzreihe mit Koeffizienten $p_x \geq 0$ und $\sum p_x = 1$.

(Die WEF kann auch für diskrete ZV, die negative oder andere Werte nehmen können, definiert werden. Konvergenz der Funktion für einen unendlichen Ereignisraum kann dann ein Problem sein. Im endlichen Fall geht es.)

5.2 Eigenschaften von $g_X(z)$

1. $g_X(1) = 1$

2. $g_X(0) = p_0$

3. p_x ist der Koeffizient von z^x in $g_X(z)$

4. Eindeutigkeit

5. $E[X] = \sum\limits_{x=0}^{\infty} x p_x = g_X^{'}(1)$

6. $V[X] = \sum\limits_{x=0}^{\infty} (x - E[X])^2 p_x$

   $= g_X^{''}(1) + g_X^{'}(1) - (g_X^{'}(1))^2$

5.3 Addieren von unabhängigen Zufallsvariablen

Der Hauptvorteil von WEF ist:
gegeben $W = \sum_{i=1}^{n} X_i$
wo $\{X_i\}$ unabhängige diskrete ZV sind, gilt

$$g_W(z) = \prod_{i=1}^{n} g_{X_i}(z) \tag{1}$$

Wenn $\{X_i\}$ identischverteilt sind, gilt

$$g_W(z) = g_X(z)^n$$

Beweis:

$$\begin{aligned} g_W(z) &= E[z^W] \\ &= E[z^{\sum_{i=1}^{n} X_i}] \\ &= E[z^{X_1} z^{X_2} .... z^{X_n}] \end{aligned}$$

Für $\{X_i\}$ unabhängig

$$\begin{aligned} &= E[z^{X_1}] E[z^{X_2}] .... E[z^{X_n}] \\ &= \prod_{i=1}^{n} g_{X_i}(z) \end{aligned}$$

Beispiel mehrerer Würfel

$$p_x = \frac{1}{6} \quad \text{für} \quad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$g_X(z) = \sum_{x=1}^{6} \frac{z^x}{6} = \frac{1}{6} z \frac{(1 - z^6)}{(1 - z)}$$

Wenn wir viermal würfeln, was ist $P(W = 20)$?

$$\begin{aligned} g_W(z) &= (g_X(z))^4 \\ &= (\frac{1}{6})^4 z^4 \frac{(1 - z^6)^4}{(1 - z)^4} \end{aligned}$$

Wir suchen den Koeffizient von z^{20} in

$$\frac{z^4}{6^4}(1 - 4z^6 + 6z^{12} - 4z^{18} ...)(1 - 4z + 10z^2 - ..)$$

$$\text{weil} \quad (1 - z)^{-4} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{4 + i - 1}{i} (-z)^i$$

$$P(W = 20) = \frac{1}{6^4}[\binom{19}{16} - 4\binom{13}{10} + 6\binom{7}{4}] = \frac{35}{1296}$$

5.4 WEF Beispiele für Verteilungen

Poisson $X \sim P(\lambda)$

$$\begin{aligned} g_X(z) &= \sum_{x=0}^{\infty} z^x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} &(1) \\ &= e^{-\lambda(1-z)} &(2) \end{aligned}$$

Binomial $X \sim B(N, p)$

$$g_X(z) = (pz + q)^n \quad (3)$$

Geometrische $X \sim Geom(p)$

$$g_X(z) = \frac{p}{(1 - qz)} \quad (4)$$

5.5 Summe von zwei Zufallsvariablen

X eine ZV mit Verteilung $\{p_x\}$ $x = 0, 1, 2...$
Y eine ZV mit Verteilung $\{p_y\}$ $y = 0, 1, 2...$
X und Y unabhängig
Was ist die Verteilung von $W = X + Y$?

(a) Mit Faltung

$$P(W = w) = \sum_{x=0}^{w} P(X = x)P(Y = w - x) \tag{1}$$

(b) Mit WEF

$$g_W(z) = g_X(z)g_Y(z) \tag{2}$$

5.5.1 Beispiel mit zwei Binomial ZV

$$X \sim B(n, p_1) \quad Y \sim B(m, p_2)$$

WEF: $\quad g_W(z) = (p_1 z + q_1)^n (p_2 z + q_2)^m$

Faltung: $\quad P(W = w) =$

$$\sum_{x=max(0,w-m)}^{min(w,n)} \binom{n}{x} p_1^x q_1^{n-x} \binom{m}{w-x} p_1^{w-x} q_1^{m-w+x}$$

5.6 Differenz von zwei Zufallsvariablen

Für $V = X - Y$ muss (meistens) die Faltung benutzt werden:

$$P(V = v) = \sum_{x=a}^{\infty} P(X = x) P(Y = x - v) \qquad (1)$$

$$\text{wo} \quad a = \max(0, v) \quad \text{und} \quad -\infty < v < \infty$$

5.6.1 Beispiel eines Fußballspieles

$$X = \text{Tore für Mannschaft 1}, \quad X \sim P(\lambda_1)$$

$$Y = \text{Tore für Mannschaft 2}, \quad Y \sim P(\lambda_2)$$

Für X und Y unabhängig: $W = X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$
aber für $V = X - Y$

$$P(V = v) = \sum_{x=\max(0,v)}^{\infty} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^x}{x!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{(x-v)}}{(x-v)!}$$

$$P(\text{Unentschieden}) = P(V = 0) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda_1 - \lambda_2} \frac{(\lambda_1 \lambda_2)^x}{(x!)^2}$$

5.7 Zufällige Summen von Zufallsvariablen

Seien $\{X_i\}$ unabhängig identisch verteilte (u.i.v.) diskrete ZV und R eine weitere unabhängige ZV mit Ereignisraum $\{0, 1, 2...\}$.
Wir suchen die Verteilung von $Z = \sum_{i=1}^{R} X_i$.

$$P(Z = k) = \sum_{r=0}^{\infty} p_r P(\sum_{i=1}^{r} X_i = k)$$

$$\begin{aligned}
g_Z(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{r=0}^{\infty} p_r P(\sum_{i=1}^{r} X_i = k) \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} p_r \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(\sum_{i=1}^{r} X_i = k) \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} p_r g_X(z)^r \\
&= g_R(g_X(z))
\end{aligned}$$

z.B. Für $R \sim P(\mu)$ und $X_i \sim P(\lambda)$ ist

$$g_Z(z) = e^{-\mu(1-e^{-\lambda(1-z)})}$$

5.7.1 Beispiele zufälliger Summen von Zufallsvariablen

(1)
Gruppen $\sim P(3)$, # Mitglieder pro Gruppe $\sim P(2)$ Die ZV # Mitglieder insgesamt hat WEF

$$e^{-3(1-e^{-2(1-z)})}$$

(2)
Unfälle pro Woche $\sim P(4)$
Beteiligte pro Unfall $\sim$ Poisson(3) ohne 0

$$p_x = ke^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \qquad x > 0$$

$$p_0 = 0$$

$$k = (1 - e^{-\lambda})^{-1}$$

$$g_X(z) = \frac{(e^{3z} - 1)}{(e^3 - 1)}$$

Beteiligte insgesamt hat die WEF

$$e^{-4(1-\frac{(e^{3z}-1)}{(e^3-1)})}$$