

5.8 Verzweigungsprozesse

Die Wahrscheinlichkeit des Aussterbens einer Linie.

Eine Person hat k Kinder mit Wahrscheinlichkeit p_k . Die WEF ist

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$$

Sei Z_n die Anzahl der Nachkommen in der n . Generation und $Z_0 = 1$. Die WEF für Z_n ist

$$\begin{aligned} g_n(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(Z_n = k) \quad n > 1 \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} P(Z_{n-1} = r) \sum_{k=0}^{\infty} z^k P\left(\sum_{i=0}^r X_i = k\right) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} P(Z_{n-1} = r) g(z)^r \\ &= g_{n-1}(g(z)) \end{aligned} \tag{1}$$

und es ist weiterhin klar, dass

$$\begin{aligned} g_1(z) &= g(z) \\ g_2(z) &= g(g(z)) \\ g_n(z) &= g(g_{n-1}(z)) \end{aligned}$$

5.8.1 Momente von Z_n

$$g'_n(z) = g'(g_{n-1}(z))g'_{n-1}(z)$$

$$E[Z_n] = g'_n(1) = g'(g_{n-1}(1))g'_{n-1}(1) = \mu E[Z_{n-1}]$$

$$E[Z_n] = \mu^n$$

$$\text{Var}[Z_n] = \begin{cases} n\sigma^2 & \mu = 1 \\ \frac{\sigma^2(\mu^n - 1)\mu^{n-1}}{\mu - 1} & \mu \neq 1 \end{cases}$$

5.8.2 Aussterbewahrscheinlichkeit

Sei $q_n = P(Z_n = 0)$ die Wahrscheinlichkeit, dass es in der n . Generation keine Kinder gibt.

$$q_{n+1} \geq q_n$$

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$$

ist die Aussterbewahrscheinlichkeit.

$$\begin{aligned} q_n &= g_n(0) \\ &= g(g_{n-1}(0)) \\ q &= \lim g(g_{n-1}(0)) \\ &= g(\lim g_{n-1}(0)) \\ &= g(q) \end{aligned} \tag{1}$$

NB g ist eine stetige Funktion.

5.8.3 Die Gleichung $g(z) = z$

$$g(0) = p_0 > 0$$

(Sonst kann die Linie nie aussterben)

$$g(z) > 0 \quad \text{in} \quad [0, 1]$$

$$g(1) = 1$$

Da $g'(z) > 0$ in $[0, 1]$, haben wir zwei mögliche Fälle:

$$(a) \quad g'(1) \leq 1 \quad \text{und} \quad q = 1$$

$$(b) \quad g'(1) > 1 \quad \text{und} \quad q \text{ ist die kleinste Lösung } > 0$$

$$\text{NB} \quad g'(1) = E[X]$$

Im Fall (b) sei $\eta = g(\eta)$ und $\eta < 1$

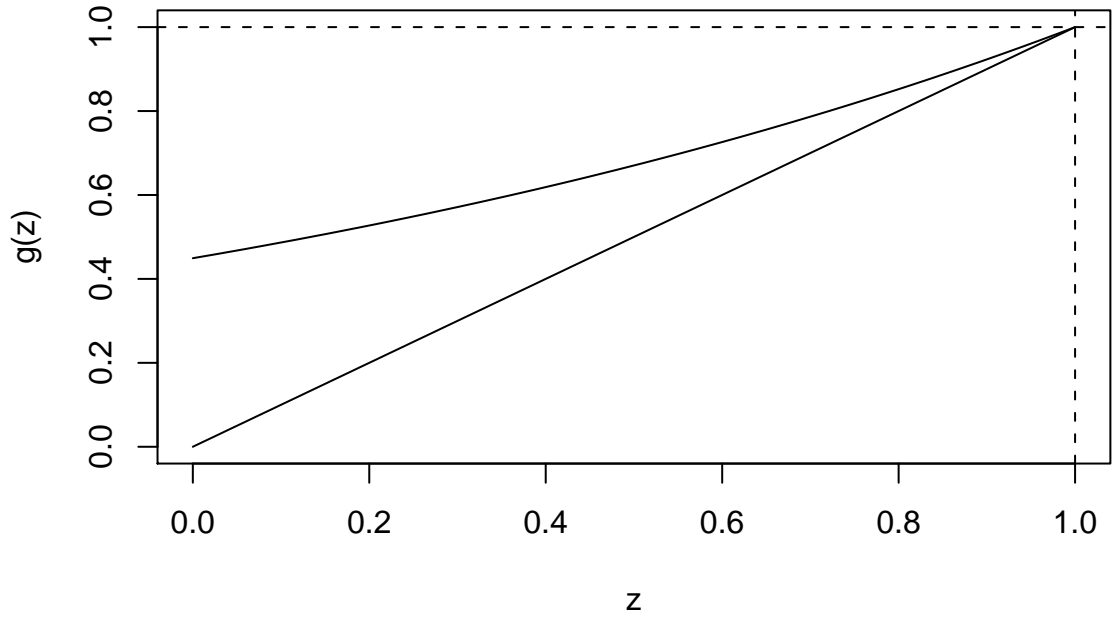
$$q_1 = g(0) \leq \eta$$

$$\Rightarrow g(q_1) \leq g(\eta) = \eta$$

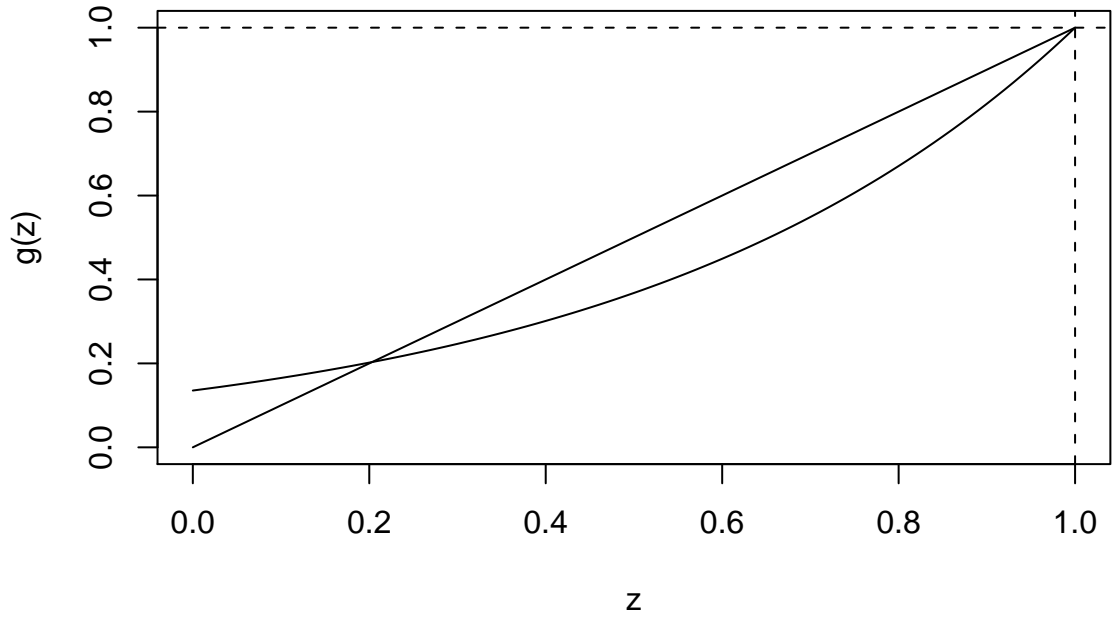
$$\Rightarrow q_2 = g(q_1) \leq \eta$$

und folgendermassen $q_n \leq \eta$ so dass $\eta = q$

(a) $g'(1) < 1$ und $q=1$



(b) $g'(1) > 1$ und $0 < q < 1$



5.8.4 Verzweigungsprozesse – Beispiele

1) Poisson Verteilung

$$g(z) = e^{-\mu(1-z)}$$

$$g(z) = z \Rightarrow \mu = -\frac{1}{(1-z)} \log z = h(z)$$

$$q = 1 \quad 0 \leq \mu \leq 1$$

$$q = h^{-1}(\mu) \quad 1 < \mu$$

2) Geometrische Verteilung

$$g(z) = \frac{p}{(1-qz)}$$

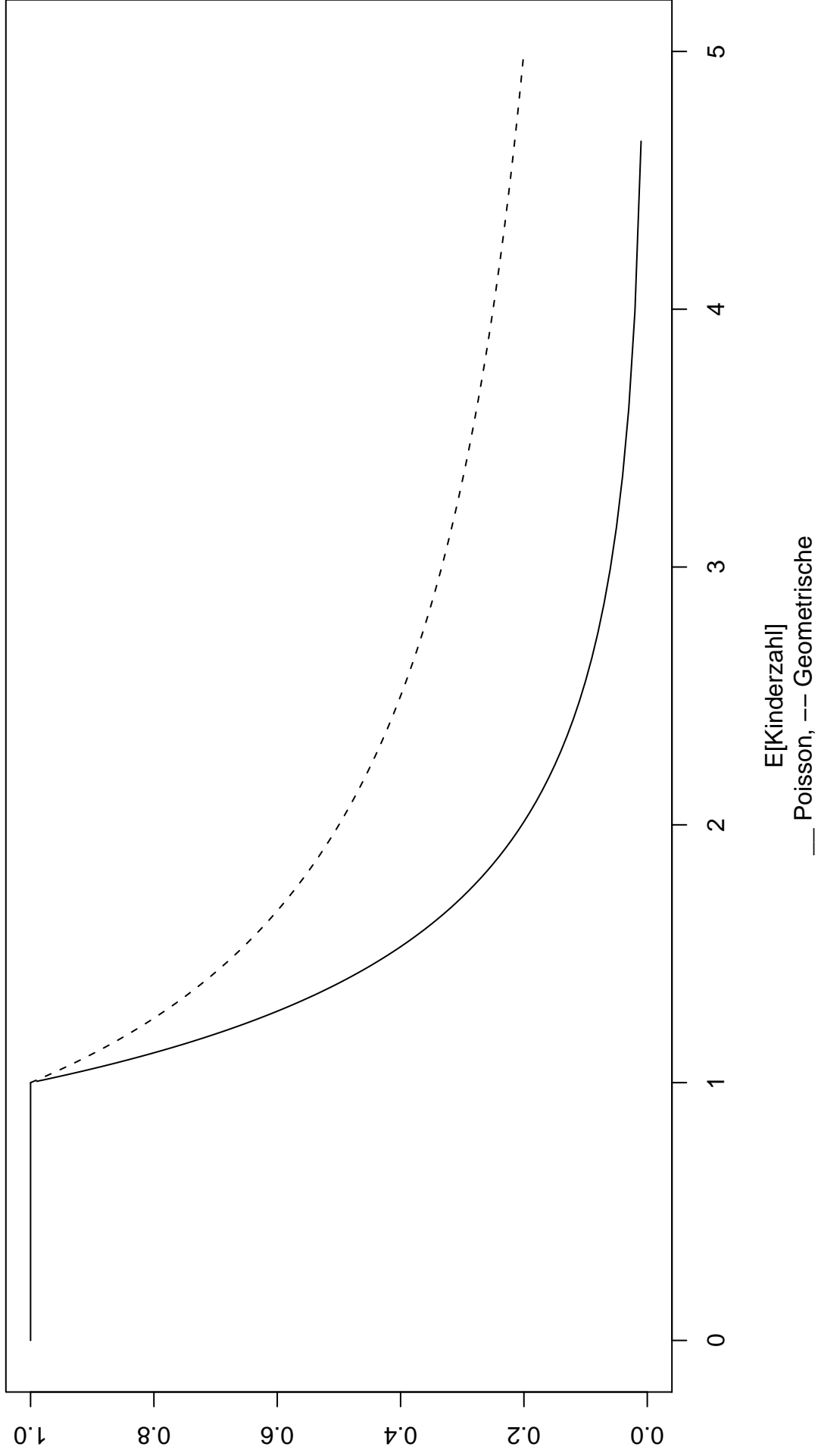
$$g(z) = z \Rightarrow qz^2 - z + p = 0$$

$$E[X] = \mu = \frac{q}{p} \Rightarrow \mu z^2 - (1 + \mu)z + 1 = 0$$

$$q = 1 \quad 0 \leq \mu \leq 1$$

$$q = \frac{(1 + \mu) + \sqrt{(1 + \mu)^2 - 4\mu}}{2\mu} = \frac{1}{\mu} \quad 1 < \mu$$

Aussterbewahrscheinlichkeiten



6 Kombinatorik: Einschluß-Ausschluß Formel

6.1 Indikatorfunktionen

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \in A \\ 0 & \text{falls } \omega \notin A \end{cases}$$

I_A ist eine Zufallsvariable

$$E[I_A] = P(A)$$

$$I_{\bar{A}} = 1 - I_A$$

$$I_{A \cap B} = I_A I_B$$

$$I_A^2 = I_A$$

$$\text{Var}[I_A] = P(A)(1 - P(A))$$

$$A \subset B \Rightarrow I_A \leq I_B$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow I_{A \cup B} = I_A + I_B$$

6.2 Wahrscheinlichkeiten von m Ereignissen

Gegeben m beliebige Ereignisse, $\{A_i\}$,
was ist die Wahrscheinlichkeit, dass:

- keine stattfinden?
- genau n stattfinden?
- mindestens n stattfinden?

Beliebig bedeutet,
dass wir Unabhängigkeit NICHT annehmen dürfen.

6.3 Einschluß-Ausschluß Formel

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

folgt aus den Axiomen von Kolmogoroff (§1.5.1).

Weiter können wir zeigen, dass

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \sum_i P(A_i) - \sum_{j>i} P(A_i \cap A_j) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Für den allgemeinen Fall mit m beliebigen Ereignissen $\{A_i\}$ brauchen wir

$$S_k = \sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, m\}} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots \cap A_{i_k})$$

die Summe der Wahrscheinlichkeiten von allen Durchschnitten, die aus genau k der m Ereignissen gebildet werden können. Es lässt sich für alle m zeigen:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = S_1 - S_2 + S_3 - \dots + (-1)^{m+1} S_m \quad (1)$$

$1 - P\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass keins von den m Ereignissen stattfindet.

Beweis von der Einschluß-Ausschluß Formel

Sei B das Ereignis $\bigcup_{i=1}^m A_i$ dann ist

$$I_B = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - I_{A_i})$$

Die rechte Seite wird ausmultipliziert und dann werden Erwartungswerte auf beiden Seiten gebildet.

6.3.1 Anwendung der Einschluß-Ausschluß Formel

k Kugeln werden auf n Fächer verteilt. Jede Kugel kann mit gleicher Wahrscheinlichkeit in jedes Fach kommen.

Was ist $P(\text{mindestens 1 Fach leer bleibt})$?

Sei A_i das Ereignis, dass Fach i leer bleibt.

$$P(A_i) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^k$$

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots A_{i_m}) = \left(\frac{n-m}{n}\right)^k$$

$$S_m = \left(\frac{n-m}{n}\right)^k \binom{n}{m}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{m=1}^n (-1)^{1+m} S_m$$

z.B.

$$n = 10, \quad k = 20 \quad \Rightarrow p =$$

$$n = 20, \quad k = 50 \quad \Rightarrow p =$$

6.4 Die Formeln von Waring

Sei (Ω, F, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und A_1, \dots, A_N Ereignisse. Nehmen wir an, dass für beliebige $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ sei $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots \cap A_{i_k})$ bekannt.

$$B_n = \{\omega \in \Omega; \omega \in A_k \text{ für genau } n \text{ Werte von } N\}$$

$$C_n = \{\omega \in \Omega; \omega \in A_k \text{ für mindestens } n \text{ Werte von } N\}$$

$$P(B_n) = \sum_{k=n}^N (-1)^{k-n} \binom{k}{n} S_k \quad (1)$$

$$P(C_n) = \sum_{k=n}^N (-1)^{k-n} \binom{k-1}{n-1} S_k \quad (2)$$

$P(C_1)$ ist die Einschluß-Ausschluß Formel.

6.4.1 Beweis für $P(B_n)$

$$\begin{aligned}
 I_{B_n} &= \sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_n\}} I_{A_{i_1}} I_{A_{i_2}} \dots I_{A_{i_n}} (1 - I_{A_{i_{n+1}}}) \dots (1 - I_{A_{i_N}}) \\
 &= \sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_n\}} I_{A_{i_1}} \dots I_{A_{i_n}} \sum_{l=0}^{N-n} (-1)^l \sum_{\{j_1, j_2, \dots, j_l\}} I_{A_{j_1}} \dots I_{A_{j_l}}
 \end{aligned}$$

Es wird über alle $\{j_1, j_2, \dots, j_l\} \subset \{i_{n+1}, \dots, i_N\}$ summiert; dabei ist für $l = 0$ $\{j_1, j_2, \dots, j_l\}$ die leere Menge und $I_{A_{j_1}} \dots I_{A_{j_l}} = 1$.

$$= \sum_{l=0}^{N-n} (-1)^l \sum_{\{i_1, \dots, i_n\}} \sum_{\{j_1, \dots, j_l\}} I_{A_{i_1}} \dots I_{A_{i_n}} I_{A_{j_1}} \dots I_{A_{j_l}}$$

Es gibt $\binom{n+l}{n}$ Möglichkeiten, eine Menge $\{h_1, \dots, h_{n+l}\}$ in disjunkte Teilmengen $\{i_1, \dots, i_n\}$ und $\{j_1, j_2, \dots, j_l\}$ zu zerlegen.

$$= \sum_{l=0}^{N-n} (-1)^l \sum_{\{h_1, \dots, h_{n+l}\}} \binom{n+l}{n} I_{A_{h_1}} \dots I_{A_{h_{n+l}}}$$

Aus $P(B_n) = E[I_{B_n}]$ und der Additivität des Erwartungswerts folgt das Resultat: Setzen wir $k = n + l$ und

$$P(B_n) = \sum_{k=n}^N (-1)^{k-n} \binom{k}{n} S_k$$

6.4.2 Beweis für $P(C_n)$

Die Formel für $P(C_n)$ folgt nach Induktion.

Für $n = N$ ist $P(C_n) = P(B_n) = S_N$

Für $n \leq N$ gilt

$$\begin{aligned} P(C_{n-1}) &= P(B_{n-1}) + P(C_n) \\ &= \sum_{k=n-1}^N (-1)^{k-n+1} \binom{k}{n-1} S_k + \sum_{k=n}^N (-1)^{k-n} \binom{k-1}{n-1} S_k \\ &= S_{n-1} + \sum_{k=n}^N (-1)^{k-n+1} S_k \left[\binom{k}{n-1} - \binom{k-1}{n-1} \right] \end{aligned}$$

Aus

$$\binom{k}{n-1} - \binom{k-1}{n-1} = \binom{k-1}{n-2}$$

folgt das Resultat.

6.4.3 Anwendung von Waring: Matching

z.B. N Briefe und N dazu gehörende Umschläge

Was ist die Wahrscheinlichkeit bei einer zufälligen Verteilung der Briefe an die Umschläge, dass genau n Briefe die richtigen Umschläge bekommen?

Sei A_{k_1} das Ereignis, dass Brief k_1 den richtigen Umschlag bekommt:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots \cap A_{i_k}) = \frac{(N - k)!}{N!}$$

Wir suchen
$$P(B_n) = \sum_{k=n}^N (-1)^{k-n} \binom{k}{n} S_k$$

$$S_k = \binom{N}{k} \frac{(N - k)!}{N!} = \frac{1}{k!}$$

$$P(B_n) = \sum_{k=n}^N (-1)^{k-n} \frac{1}{n!} \frac{1}{(k - n)!}$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{l=0}^{N-n} (-1)^l \frac{1}{l!}$$

für $N \rightarrow \infty$, $P(B_0) \rightarrow e^{-1} \doteq 0.368$

und die Anzahl Briefe mit dem richtigen Umschlag $\sim P(1)$