

Diskrete Verteilungen – Rekapitulation

H: Hypergeometrische – ziehen ohne Rücklegen

B: Binomial – Wieviele Treffer aus N?

G: Geometrische – Wieviele Versuche bis Erfolg?

NB: Negative Binomial – Wieviele Versuche zum r. Erfolg?

P: Poisson – Wieviele Ereignisse?

B, G, NB, P – alle nehmen Unabhängigkeit an.

und Spezialfälle wie Benford's Gesetz:

Die Verteilung der ersten Ziffer in Zahlen ist

$$P(\text{erste Ziffer} = n) = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad n = 1, \dots, 9$$

K7 Wahrscheinlichkeitsmaße mit Dichten

7.1 Ereignisräume

Ein endlicher Raum ohne Reihenfolge:

(rot, schwarz, blau)

Ein endlicher geordneter Raum:

$(1, 2, 3, 4, 5, 6)$

Ein abzählbarer Raum:

$(0, 1, \dots)$

Ein nichtabzählbarer Raum:

$[0, \infty)$ oder $[0, 1]$ oder $(-\infty, \infty)$

Bis jetzt haben wir höchstens abzählbare Ereignisräume betrachtet. Diskrete Zufallsvariablen können wir als Abbildungen auf \mathbb{N}_0 betrachten. Bei unendlichen nicht-abzählbaren Räumen Ω werden wir darauf verzichten, $P(A)$ für alle $A \in \Omega$ zu definieren. Wir wollen mit kontinuierlichen Zufallsvariablen arbeiten können, die auf $(-\infty, \infty)$ definiert sind.

z.B. Länge einer Krankheit, Betriebsergebnisse, Meßfehler, Wartezeiten, Schadenssummen, Wasserverbrauch,

7.2 σ -Algebren

Def 7.2.1 Sei $\Omega \neq \emptyset$ beliebig. Eine Familie von Teilmengen von Ω , \mathcal{A} , heißt σ -Algebra, wenn gilt:

$$\Omega \in \mathcal{A}$$

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$$

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

Dann folgt $\emptyset \in \mathcal{A}$ und $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$

Lemma 7.2.2

Sei $I \neq \emptyset$ eine beliebige Indexmenge und sei für alle $i \in I$, \mathcal{A}_i eine σ -Algebra in Ω . Dann ist das System

$$\mathcal{A}_I = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$$

aller Mengen $A \in \Omega$, die für alle i zu \mathcal{A}_i gehören eine σ -Algebra.

Beweis: (1) $\Omega \in \mathcal{A}_i \Rightarrow \Omega \in \mathcal{A}_I$

(2) $A \in \mathcal{A}_I \Rightarrow \forall i \quad A \in \mathcal{A}_i$ und $A^c \in \mathcal{A}_i \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}_I$

(3) wie (2)

Satz 7.2.3

Sei $\Omega \neq \emptyset$ und \mathcal{F} eine beliebige Familie von Teilmengen von Ω . Dann gibt es unter den σ -Algebren, die \mathcal{F} enthalten, eine kleinste $\mathcal{A}(\mathcal{F})$, die Familie aller Mengen A die zu jeder σ -Algebra in Ω gehören, welche \mathcal{F} enthält.

Beweis

Es gibt mindestens eine σ -Algebra, die \mathcal{F} enthält, die Familie aller Teilmengen von Ω . Ist $\{\mathcal{A}_i : i \in I\}$ eine beliebige Indizierung der σ -Algebren, die \mathcal{F} enthalten, so ist $I \neq \emptyset$ und $\mathcal{A}(\mathcal{F}) = \mathcal{A}_I$.

Beispiel:

$$\Omega = \mathbb{R}^n$$

und \mathcal{F} die Familie aller nach links halboffenen Intervalle

$$(a, b] = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n\}$$

$$\mathcal{B} := \mathcal{A}(\mathcal{F})$$

ist die Borelsche σ -Algebra in \mathbb{R}^n

7.3 Wahrscheinlichkeitsräume

Def 7.3.1

Ein meßbarer Raum ist ein Paar (Ω, \mathcal{A}) bestehend aus einer nichtleeren Menge Ω und einer σ -Algebra \mathcal{A} von Teilmengen von Ω . Ein Wahrscheinlichkeitsmaß P ist eine auf \mathcal{A} definierte Funktion mit Werten in $[0, 1]$ welche den folgenden Bedingungen genügt:

$$P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

$$P(\Omega) = 1$$

P ist σ -additiv, d.h. für disjunkte $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ gilt

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

(Ω, \mathcal{A}, P) heißt Wahrscheinlichkeitsraum.

7.4 Verteilungsfunktionen und Dichten

7.4.1 Definitionen

Eine Funktion F auf \mathbb{R} mit Werten in $[0, 1]$ heißt Verteilungsfunktion, wenn sie rechtsstetig und monoton wachsend ist (nicht notwendig strikt monoton) und wenn für

$$x \rightarrow -\infty \quad F(x) \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow \infty \quad F(x) \rightarrow 1$$

gilt.

Ist P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathbb{R} und setzt man $F(x) = P((-\infty, x])$, so ist F eine Verteilungsfunktion. Umgekehrt

$$P((a, b]) = F(b) - F(a)$$

Eine Dichte auf \mathbb{R} ist eine nichtnegative Funktion mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Das Integral muß wohldefiniert sein: f muß stetig bis auf höchstens endlich viele Sprungstellen sein.

Ist f eine Dichte, dann ist

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

eine Verteilungsfunktion. Die Wahrscheinlichkeit von Intervallen ist durch

$$P((a, b]) = \int_a^b f(t) dt$$

gegeben.

Ist F eine beliebige stetige Verteilungsfunktion auf \mathbb{R} , die auf dem Komplement einer endlichen oder leeren Menge C stetig differenzierbar ist, so wird durch

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) \quad x \in \mathbb{R} \setminus C$$

eine Dichte f zu F definiert.

Ist (a_n) eine wachsende Folge mit $a_n < b$, die gegen b strebt, so ist $\{b\}$ der Durchschnitt der $(a_n, b]$ und die über diese Intervalle erstreckten Integrale streben gegen 0.

$$\Rightarrow P(\{b\}) = 0 \quad \forall b$$

Kein Ergebnis $b \in \mathbb{R}$ hat positive Wahrscheinlichkeit.

7.4.2 Beispiele von Dichten

- Die Gleichverteilung (z.B. Zufallszahlen)

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad a \leq x \leq b$$

Insbesondere

$$f(x) = 1 \quad 0 \leq x \leq 1$$

- Die Exponentialverteilung (z.B. Zeit zum Ereignis)

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$$

- Die Normalverteilung (z.B. Meßfehler)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty$$