

# K8 Stetige Zufallsvariablen – Theorie und Praxis

## 8.1 Theoretischer Hintergrund Wir haben

- (nicht abzählbare) Wahrscheinlichkeitsräume
- Meßbare Funktionen
- Zufallsvariablen
- Verteilungsfunktionen
- Dichten in  $\mathbb{R}^n$
- Funktionen von Zufallsvariablen
- Unabhängigkeit
- Erwartungswerte

## 8.2 Und in der Praxis? Modellierung

- Was ist eine Zufallsvariable?  
z.B. Länge einer Dienstreise  
Niederschlag pro Tag  
Unsicherheit bei Geschwindigkeitsmessungen
- Eine Verteilungsfunktion?  $F(x) = P(X \leq x)$   
z.B. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Fahrt weniger als eine Stunde dauert?  
Dass wir weniger als 2 cm Regen haben?  
Dass der Meßfehler kleiner 5 km/Stunde ist?
- Eine Dichte?  $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$   
Keine Wahrscheinlichkeit!
- Ein Erwartungswert?  $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$   
z.B. Wie lange dauert die Fahrt im Durchschnitt?  
Wieviel Regen erwarten wir?  
Sind die Messungen verzerrt?

### 8.3 Einige Anwendungsfragen

(1) Wieviele Leute sollen in einem Aufzug erlaubt werden?

(2) Wieviel Gepäck darf man im Flugzeug mitnehmen?

(3) Wenn die Standards verlangen, dass 95% aller Schokoriegel mindestens soviel wiegen, wie auf der Hülle versprochen wird, wie hoch muß das Durchschnittsgewicht sein?

(4) Teil A muß mit Teil B zusammenpassen. Wie groß dürfen die Variabilitäten sein?

(5) Blutdruck sollte nicht zu hoch sein. Wieviele haben einen zu hohen Blutdruck?

(6) Es wird angenommen, dass Aktienpreise lognormalverteilt sind. d.h. für einen Aktien Preis  $X_t$

$$Y_t = \log X_t \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$$

wobei  $\mu_t = \log X_0$ . Was ist  $P(a < X_t \leq b)$ ?

## 8.4 Erwartungswerte wozu?

- "Durchschnittliche" Werte
  - Gewinne, Kosten, langfristige Summen
- Beschreibung einer Verteilung
  - Mittelwert, Varianz, Schiefe, die Momente
- Schätzen der Parameter einer Verteilung
  - was erwarten wir von einem Schätzverfahren?
- Bewertung von finanziellen Derivaten
  - was ist eine Option wert?

## 8.5 Parameter

$E[X]$  der "Mittelwert" einer Verteilung (1)

Die Streuung wird mit der Varianz bemessen:

$$V[X] = E[(X - E[X])^2] \quad (2)$$

oder die Standardabweichung

$$\sigma_X = \sqrt{V[X]}$$

Eigenschaften der Varianz:

$$V[X + a] = V[X]$$

$$V[aX] = a^2 V[X]$$

$$V[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

$$g(X) = x^2 \quad \text{konvex} \quad \Rightarrow \quad E[X^2] \geq E[X]^2$$

Schiefe

$$E\left[\frac{(X - E[X])^3}{\sigma^3}\right] \quad (3)$$

und Kurtosis

$$E\left[\frac{(X - E[X])^4}{\sigma^4}\right] \quad (4)$$

gibt es auch, werden aber kaum benutzt.

## 8.5.1 Parameter Beispiele

Gleichverteilung  $U(a, b)$

$$E[X] = \frac{b + a}{2} \quad V[X] = \frac{(b - a)^2}{12}$$

Exponentialverteilung  $E(\lambda)$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \quad V[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

Normalverteilung  $N(\mu, \sigma^2)$

$$E[X] = \mu \quad V[X] = \sigma^2$$

## 8.6 Kovarianz und Korrelation

Seien  $X$  und  $Y$  Zufallsvariablen. Die Kovarianz von  $X$  und  $Y$  ist

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \quad (1)$$

Für  $X$  und  $Y$  unabhängig gilt

$$\text{Cov}(X, Y) = 0$$

Die Korrelation von  $X$  und  $Y$  mißt die lineare Abhängigkeit zwischen  $X$  und  $Y$ :

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (2)$$

$$-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$$

Das kann mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung gezeigt werden.

### 8.6.1 Die Ungleichung von Cauchy-Schwarz

Seien  $X$  und  $Y$  Zufallsvariablen und

$$E[X^2]E[Y^2] < \infty$$

dann gilt

$$E[XY]^2 \leq E[X^2]E[Y^2] \quad (3)$$

Beweis:

$$E[(XE[Y^2] - YE[XY])^2] \geq 0$$

$$\Rightarrow E[X^2]E[Y^2]^2 - 2E[XY]^2E[Y^2] + E[Y^2]E[XY]^2 \geq 0$$

$$E[Y^2](E[X^2]E[Y^2] - E[XY]^2) \geq 0$$

Für  $E[Y^2] > 0$  ist das Resultat klar. Für  $E[Y^2] = 0$  müssen  $P(Y = 0) = P(XY = 0) = 1$  folgen und dann das Resultat.

Setzen wir  $W = X - E[X]$  und  $T = Y - E[Y]$ .

Cauchy-Schwarz bedeutet, dass

$$E[WT]^2 \leq E[W^2]E[T^2]$$

oder

$$|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sigma_X \sigma_Y$$

$$\Rightarrow |\rho_{XY}| \leq 1$$

## 8.7 Auswertung von Wahrscheinlichkeiten für $N(\mu, \sigma^2)$

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Numerisch integrieren – besser Experten überlassen.

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right)$$

wo  $Z \sim N(0, 1)$

Zum Beispiel, gegeben  $X \sim N(i, 1)$  was ist  $P(X < 0)$ ?

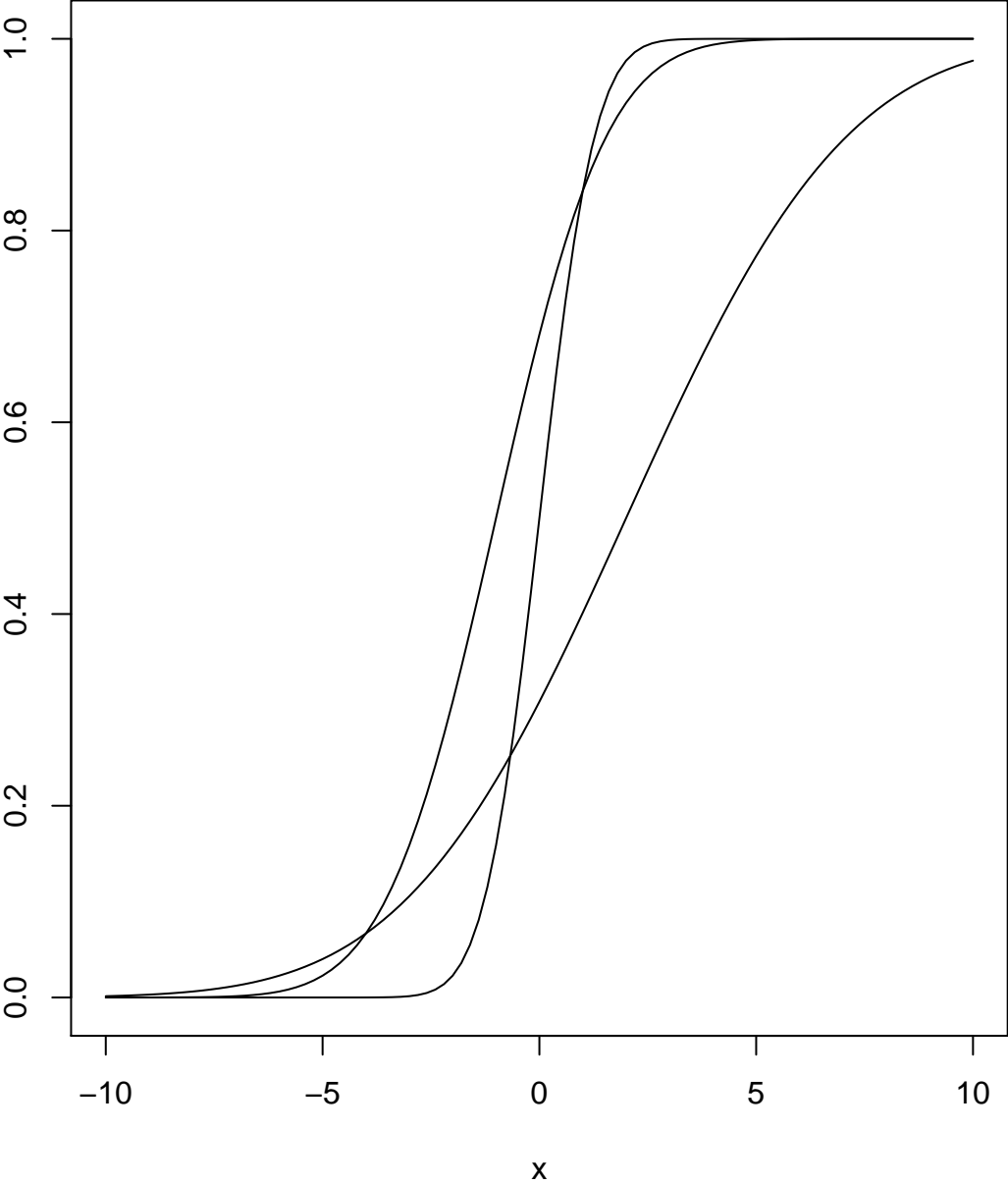
$P(Z < i)$	Excel	R	Data Desk
0	0.5	0.5	0.5
-1	0.1587	0.1587	0.1587
-5	2.867E-07	2.867E-07	2.867E-07
-8	6.221E-16	6.221E-16	6.22E-16
-10	7.620E-24	7.620E-24	0

Data Desk geht nur bis höchstens 18 Stellen.

Vor drei Jahren hat Excel sogar  $P(Z < -5)$  falsch berechnet, aber jetzt ist sie viel besser.

Was sagt Maple bzw. Mathematica?

# Normalverteilung Verteilungsfunktionen



# Normalverteilung Dichten

