K 11 Ungleichungen

11.1 Markov Ungleichung

Sei X eine stetige ZV mit Dichte $f(x)$ und sei $g(x)$ eine auf $(0, \infty]$ monoton steigende nichtnegative Funktion mit $g(a) > 0$ dann gilt

$$P(X \geq a) \leq \frac{E[g(X)]}{g(a)} \tag{1}$$

Beweis:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$$

$$\geq \int_{a}^{\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$$

$$\geq g(a)\int_{a}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= g(a)P(X \geq a)$$

Dieses Resultat gilt für <u>alle</u> $f(x)$

11.2 Tschebychew Ungleichung

Sei X eine stetige ZV mit endlicher Varianz, für $\epsilon > 0$

$$P(|X - E[X]| > \epsilon) \leq \frac{V[X]}{\epsilon^2} \tag{2}$$

Beweis:

Für $Y = (|X - E[X]|$ und $g(Y) = Y^2$ gilt nach Markov

$$P(Y \geq \epsilon) \leq \frac{E[Y^2]}{\epsilon^2}$$

$$\text{d.h.} \qquad P(|X - E[X]| \geq \epsilon) \leq \frac{V[X]}{\epsilon^2}$$

Alternative Beweis für alle reellwertige ZV mit endlicher Varianz. Setzen wir $Z = (X - E[X])$, dann ist $E[Z] = 0$ und $V[Z] = V[X]$. Definieren wir weiter

$$W = 0 \quad \text{für } |Z| < \epsilon \quad \text{und} \quad W = \epsilon^2 \quad \text{für } |Z| \geq \epsilon$$

$$\Rightarrow W \leq |Z|^2$$

$$V[X] = V[Z] = E[|Z|^2] \geq E[W]$$

$$= 0 * P(|Z| < \epsilon) + \epsilon^2 * P(|Z| \geq \epsilon)$$

$$\Rightarrow P(|Z| \geq \epsilon) = P(|X - E[X]| \geq \epsilon) \leq \frac{V[X]}{\epsilon^2}$$

11.3 Tschebychew: Bemerkungen

- Tschebychew kann keine gute Annäherung sein, da sie für alle ZV gilt. Sie ist aber in der Theorie wichtig.

- Für $\epsilon < \sigma_X$ ist Tschebychew wertlos.

- Die Markov Ungleichung kann auf ähnlicher Weise in einer allgemeineren Form bewiesen werden.

- Für unimodale Dichten gilt das Resultat

$$
\begin{aligned}
P(|X-\mu| \geq \epsilon) &\leq \frac{4\sigma^2}{9\epsilon^2} \qquad \forall \epsilon \geq \sqrt{\frac{8}{3}}\sigma \\
&\leq \frac{4\sigma^2}{3\epsilon^2} - \frac{1}{3} \qquad \forall \epsilon \leq \sqrt{\frac{8}{3}}\sigma
\end{aligned}
$$

  So dass für $\epsilon = 3\sigma$ hat man

$$
P(|X-\mu| \geq 3\sigma) \leq \frac{4}{81} < 0.05
$$

  (cf. Pukelsheim American Statistician 1994 s88-91)

11.4 Tschebychew: Beispiele

Beispiel (1)

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\text{nach Tscheb} \quad P(|X-\mu| \geq 2\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{4\sigma^2} = 0.25$$

$$\text{unimodal} \quad P(|X-\mu| \geq 2\sigma) \leq \frac{1}{9} = 0.11$$

$$\text{In der Tat} \quad P(|X-\mu| \geq 2\sigma) = 0.0456$$

Beispiel (2)

$$X \sim E(\lambda)$$

$$\text{nach Tscheb} \quad P\left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| \geq 2\frac{1}{\lambda}\right) \leq \frac{\lambda^2}{4\lambda^2} = 0.25$$

$$\text{unimodal} \quad P\left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| \geq 2\frac{1}{\lambda}\right) \leq \frac{1}{9} = 0.11$$

$$\text{In der Tat} \quad P\left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| \geq 2\frac{1}{\lambda}\right) = P\left(X \geq \frac{3}{\lambda}\right) = 0.0498$$

Beispiel (3)

$$X \sim P(\lambda)$$

nach Tscheb $\quad P\left(|X-\lambda| \geq 2\sqrt{\lambda}\right) \leq \dfrac{\lambda}{4\lambda} = 0.25$

In der Tat $\quad P\left(|X-\lambda| \geq 2\sqrt{\lambda}\right)$ hängt von λ ab

$$(a)\lambda = 1 \Rightarrow P(|X-1| \geq 2) = P(X \geq 3) =$$

$$(b)\lambda = 4 \Rightarrow P(|X-4| \geq 4) = P(X \geq 8) =$$

$$(c)\lambda = 9 \Rightarrow P(|X-9| \geq 6) = P(X \leq 3)+P(X \geq 15)$$

$$=$$

K12 Grenzwertsätze

12.1 Gesetz der großen Zahlen (Konv. in Verteilung)

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von reellwertigen, u.i.v. ZV mit $E[X_i] = \mu < \infty$. Dann konvergiert die Folge

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

in Verteilung gegen μ.

Beweis

Der Satz besagt, dass

$$P(Z_n \leq x) \to \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x < \mu \\ 1 & \text{if} \quad x > \mu \end{cases}$$

Sie $\zeta_X(t)$ die CF von X_i und $\zeta_n(t)$ die CF von Z_n.

$$\zeta_n(t) = \left[\zeta_X\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n$$

Für $n \to \infty$ benutzen wir die Taylor Erweiterung

$$\zeta_X\left(\frac{t}{n}\right) \to 1 + \frac{i\mu t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)$$

und

$$\zeta_n(t) \to e^{it\mu}$$

die CF der gewünschten Verteilung.

12.1.1 Benötigte Resultate

Eindeutigkeit

ZV X und Y haben die gleiche CF wenn und nur wenn sie die identische Verteilungsfunktion haben.

Stetigkeitssatz

Sei $F_1, F_2, \ldots$ eine Folge von Verteilungsfunktionen mit entsprechenden CF $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$.
(a) Wenn $F_n \to F$ für eine Verteilungsfunktion F mit CF ζ, dann

$$\zeta_n(t) \to \zeta(t) \qquad \forall t$$

(b) Wenn $\zeta(t) = \lim_{n\to\infty} \zeta_n(t)$ existiert und ist bei $t = 0$ stetig, ist ζ die CF für eine Verteilungsfunktion F und $F_n \to F$

12.2 Der Zentrale Grenzwertsatz

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von reellwertigen, u.i.v. ZV mit

$$E[X_i] = \mu < \infty \quad \text{und} \quad V[X_i] = \sigma^2 < \infty$$

und sei

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Dann gilt, dass

$$U_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \to N(0,1)$$

in Verteilung.

Beweis

$Y_i = \frac{(X_i - \mu)}{\sigma}$ hat die CF $\zeta_Y(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

hat die CF

$$\psi_n(t) = \left\{\zeta_y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right\}^n = \left\{1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right\}^n \to e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

für $n \to \infty$, die CF der gesuchten $N(0,1)$ Verteilung.

12.3 Anwendungen

(1) Binomial (De Moivre)

$$X \sim B(N, p)$$

$$N \to \infty \quad \Rightarrow \quad X \sim N(Np, Npq)$$

(2) Poisson

$$X \sim P(\lambda)$$

$$\lambda \to \infty \quad \Rightarrow \quad X \sim N(\lambda, \lambda)$$

(3) In der Statistik
Seien $\{X_i\}$ u.i.v. ZV mit $E[X] = \mu$ und $V[X] = \sigma^2$, dann gilt

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

12.4 Konvergenz

(1) In Verteilung

$$\text{für} \quad n \to \infty \quad P(X_n \leq x) \to P(X \leq x)$$

(2) In Wahrscheinlichkeit

$$\text{für} \quad n \to \infty \quad P(|X_n - X| > \epsilon) \to 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

(3) Fast sicher

$$\text{für} \quad n \to \infty \quad P(X_n(\omega) \to X(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega) = 1$$

$$(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$$

z.B.
Sei X eine ZV mit $P(X = 0) = P(X = 1) = 0.5$ und $X_i = X \quad \forall i$. $X_n \to X$ in Verteilung und für $Y = 1 - X$ gilt auch $X_n \to Y$ in Verteilung. Aber $|X_n - Y| = 1$ immer, so dass (2) und (3) nicht gelten können.

12.4.1 Konv. in Wahrscheinlichkeit $\Rightarrow$ K in Verteilung

$$F_n(x) = P(X_n \leq x)$$

$$= P(X_n \leq x, X \leq x + \epsilon) + P(X_n \leq x, X > x + \epsilon)$$

$$\leq F(x + \epsilon) + P(|X_n - X| > \epsilon)$$

Ähnlich findet man

$$F(x - \epsilon) \leq F_n(x) + P(|X_n - X| > \epsilon)$$

Deshalb gilt

$$F(x - \epsilon) - P(|X_n - X| > \epsilon) \leq F_n(x)$$

$$\leq F(x + \epsilon) + P(|X_n - X| > \epsilon)$$

Für $n \to \infty$ und $\forall \epsilon > 0$

$$F(x - \epsilon) \leq \liminf F_n(x) \leq \limsup F_n(x) \leq F(x + \epsilon)$$

Wenn F stetig ist, folgt das Resultat.

12.5 Das schwache Gesetz der großen Zahlen

Für das schwache Gesetz der großen Zahlen gilt Konvergenz in Wahrscheinlichkeit (stochastische Konvergenz).

Seien $X_1, X_2, \dots X_n$ unabhängige ZV mit gleichem Erwartungswert und Varianzen

$$V[X_i] \leq M < \infty \quad \forall i$$

Dann gilt $\forall \epsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - E[X]\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{M}{n\epsilon^2} \to 0$$

Beweis

Sei

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$E[Y_n] = E[X]$$

$$V[Y_n] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V[X_i] \leq \frac{M}{n}$$

Dann wendet man Tschebychew an.

12.6 Grenzwert-Resultate Beispiel

$$X_i \sim U(0,1) \quad \text{u.i.v.}$$

$$E[X_i] = \frac{1}{2} \qquad V[X_i] = \frac{1}{12}$$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad E[\bar{X}_n] = \frac{1}{2} \quad V[\bar{X}_n] = \frac{1}{12n}$$

Tschebychew:

$$P\left(\left|\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{12n\epsilon^2}$$

Schwaches Gesetz:

$$P\left(\left|\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right| \geq \epsilon\right) \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

Starkes Gesetz:

$$P\left(\left|\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right| \geq \epsilon \quad \forall n > N_\epsilon\right) \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

Zentraler Grenzwert Satz:

$$P\left(\left|\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right| \geq \epsilon\right) \to 2\int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\sqrt{12n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-6nt^2} \mathrm{d}t$$

$$= 2(1 - \Phi(\sqrt{12n}\epsilon))$$