

## 12.7 Fast sichere Konvergenz (starkes GGZ)

### 12.7.1 Hilfesatz

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Ist  $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \dots$  eine fallende Folge von Ereignissen mit Durchschnitt  $A_\infty$  so gilt

$$P(A_\infty) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i)$$

Ist  $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \dots$  eine wachsende Folge von Ereignissen mit Vereinigung  $B_\infty$  so gilt

$$P(B_\infty) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(B_i)$$

### Beweis

Für jedes  $n$  ist  $A_n$  die disjunkte Vereinigung von  $A_\infty$  und den Differenzen  $D_i = A_i \setminus A_{i+1} = A_i \cap A_{i+1}^c$

$$\Rightarrow P(A_n) = P(A_\infty) + \sum_{i=n}^{\infty} P(D_i)$$

Da die  $D_i$  disjunkt sind, konvergiert  $\sum_{i=n}^{\infty} P(D_i)$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n}^{\infty} P(D_i) \rightarrow 0$$

Zum Beweis vom zweiten Teil setzen wir

$$A_i = B_i^c$$

dann

$$B_\infty = A_\infty^c$$

und

$$\begin{aligned} P(B_\infty) &= 1 - P(A_\infty) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} (1 - P(A_i)) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} P(B_i) \end{aligned}$$

## 12.7.2 Fast sichere Konv. $\Rightarrow$ stochastische Konvergenz

(Aber nicht umgekehrt) cf. §12.4

Sei  $\epsilon > 0$

$$B_N = \{\omega \in \Omega : |Y_n(\omega) - Y(\omega)| < \epsilon \quad \forall n \geq N\}$$

bilden eine wachsende Folge und  $\cup B_N \supset A$  wo

$$A := \{\omega : \lim Y_n(\omega) = Y(\omega)\}$$

Fast sichere Konvergenz

$$\Rightarrow P(A) = 1$$

$$\Rightarrow P(B_\infty) = 1$$

(nach dem Hilfesatz im §12.7.1)

$$\Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} P(B_N) \rightarrow 1$$

Also gilt

$$P(|Y_N - Y| \geq \epsilon) \leq P(B_N^c) \rightarrow 0$$

### 12.7.3 Gegenbeispiel zum umgekehrten Resultat

$\Omega = [0, 1)$  und eine Gleichverteilung  $P$ .

Sei  $c_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$  und

$$A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ liegt mod } 1 \text{ in } [c_{n-1}, c_n]\}$$

Die Folge  $Y_n = I_{A_n}$  konvergiert stochastisch gegen 0, denn für  $0 < \epsilon < 1$

$$P(|Y_n - 0| \geq \epsilon) = P(A_n) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Für jedes  $\omega \in \Omega$  und für jedes  $N$  existieren Zahlen  $m, n \geq N$  mit

$$\omega \in A_m \text{ und } \omega \in A_n^c$$

Also gilt für jedes  $\omega$

$$\liminf Y_n(\omega) = 0$$

und

$$\limsup Y_n(\omega) = 1$$

## 12.7.4 Lemma von Borel-Cantelli

Für ein Folge von Ereignissen  $A_1, A_2, \dots$  sei

$$A^* := \{\omega \in \Omega : \omega \in A_k \text{ für unendlich viel } k\}$$

$$(1) \text{ Gilt } \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty, \text{ ist } P(A^*) = 0$$

$$(2) \text{ Sind die } A_k \text{ u. und } \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \infty, \text{ ist } P(A^*) = 1$$

### Beweis (1)

$\omega \in \Omega$  gehört zu  $A^*$

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k$$

Für jedes  $n$

$$P(A^*) \leq P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \rightarrow 0$$

(2)

$$P\left(\bigcap_{k=n}^N A_k^c\right) = \prod_{k=n}^N (1 - P(A_k)) \leq e^{-\sum_{k=n}^N P(A_k)}$$

da für  $0 \leq \alpha_i \leq 1$  gilt  $1 - \alpha_i \leq e^{-\alpha_i}$

Bei festem  $n$ , lassen wir  $N \rightarrow \infty$

$$e^{-\sum_{k=n}^N P(A_k)} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) = 0$$

$$\Rightarrow P((A^*)^c) = 0 \quad \text{da} \quad (A^*)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c$$

$$\Rightarrow P(A^*) = 1$$

Eine Aussage gilt für fast alle  $\omega$  (fast sicher, fast überall), wenn die Menge  $B$  der  $\omega$  für die sie nicht gilt  $P(B) = 0$  hat.

## 12.8 Das starke Gesetz der großen Zahlen

Sei  $\{X_i\}$  eine Folge von reellwertigen unkorrelierten ZV und

$$V[X_i] \leq M < \infty \quad \forall i$$

dann konvergiert die Folge

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - E[X_i])$$

fast sicher gegen 0.

### Beweis

Zuerst zeigen wir, dass  $Z_{n^2}$  fast sicher gegen 0 konvergiert. o.B.d.A.

$$E[X_i] = 0$$

Da

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = 0 \quad i \neq j$$

$$V[Z_{n^2}] = \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n^2} V[X_i] \leq \frac{M}{n^2}$$

Nach Tschebychew

$$P(|Z_{n^2}| \geq \epsilon) \leq \frac{M}{\epsilon^2 n^2}$$

Setzen wir

$$A_n = \{|Z_{n^2}| \geq \epsilon\}$$

$$\sum P(A_n) \leq \frac{M}{\epsilon^2} \sum \frac{1}{n^2} < \infty$$

(Deshalb haben wir  $n^2$  genommen statt  $n$ .)

Nach Borel-Cantelli folgt, dass fast jedes  $\omega$  nur zu endlich vielen  $A_n$  gehört.

Setzen wir  $\epsilon = \frac{1}{k}$

$$E_k = \{\omega : |Z_{n^2}(\omega)| \geq \frac{1}{k}\}$$

für unendlich viel  $n$

$$\Rightarrow P(E_k) = 0$$

$$\Rightarrow P(E) = P\left(\bigcup_k E_k\right) = 0$$

Für  $\omega \in E^c$  gebe es zu jedem  $k$  nur endlich viel  $n$  mit

$$|Z_{n^2}(\omega)| \geq \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \lim Z_{n^2}(\omega) = 0$$

Jetzt für alle  $m \in \mathbb{N}$  sei  $n = n(m)$  die natürliche Zahl

$$n^2 \leq m < (n+1)^2$$

Sei

$$S_k = \sum_{i=1}^k X_i = kZ_k$$

$$V[S_m - S_{n(m)^2}] = \sum_{i=n^2+1}^m V[X_i] \leq M(m - n^2)$$

Nach Tschebychew, für  $\epsilon > 0$

$$P(|S_m - S_{n(m)^2}| \geq \epsilon n^2) \leq \frac{M(m - n^2)}{\epsilon^2 n^4}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} P\left(\frac{1}{n(m)^2} |S_m - S_{n(m)^2}| \geq \epsilon\right)$$

$$\leq \frac{M}{\epsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n^2}^{(n+1)^2-1} \frac{m - n(m)^2}{n(m)^4}$$

$$\leq \frac{M}{\epsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} (1 + 2 \dots + 2n)$$

$$= \frac{M}{\epsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(2n+1)}{2n^4} < \infty$$

Nach Borel-Cantelli folgt für fast alle  $\omega$  für hinreichend großes  $m$

$$\frac{1}{n(m)^2} |S_m(\omega) - S_{n(m)^2}(\omega)| < \epsilon$$

Vom ersten Teil des Beweises

$$|Z_{n^2}| < \epsilon$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2} |S_{n^2}| < \epsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{S_m}{n^2} \right| < 2\epsilon$$

$$\Rightarrow |Z_m| < 2\epsilon$$