

## K 13 Wie gut ist der ZGS?

### 13.1 Wahrscheinlichkeitsmetrik

Um zwei Verteilungen zu vergleichen, benutzen wir

$$d(F, G) = \sup_x |F(x) - G(x)|$$

den maximalen Unterschied zwischen den Verteilungsfunktionen. (Es gibt natürlich andere Möglichkeiten auch.)

z.B. **U(0,1)** und **N(0,1)**       $X \sim U(0, 1)$

Um mit einer standard Normalverteilung zu vergleichen, nehmen wir

$$Y = \frac{X - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{12}}}$$

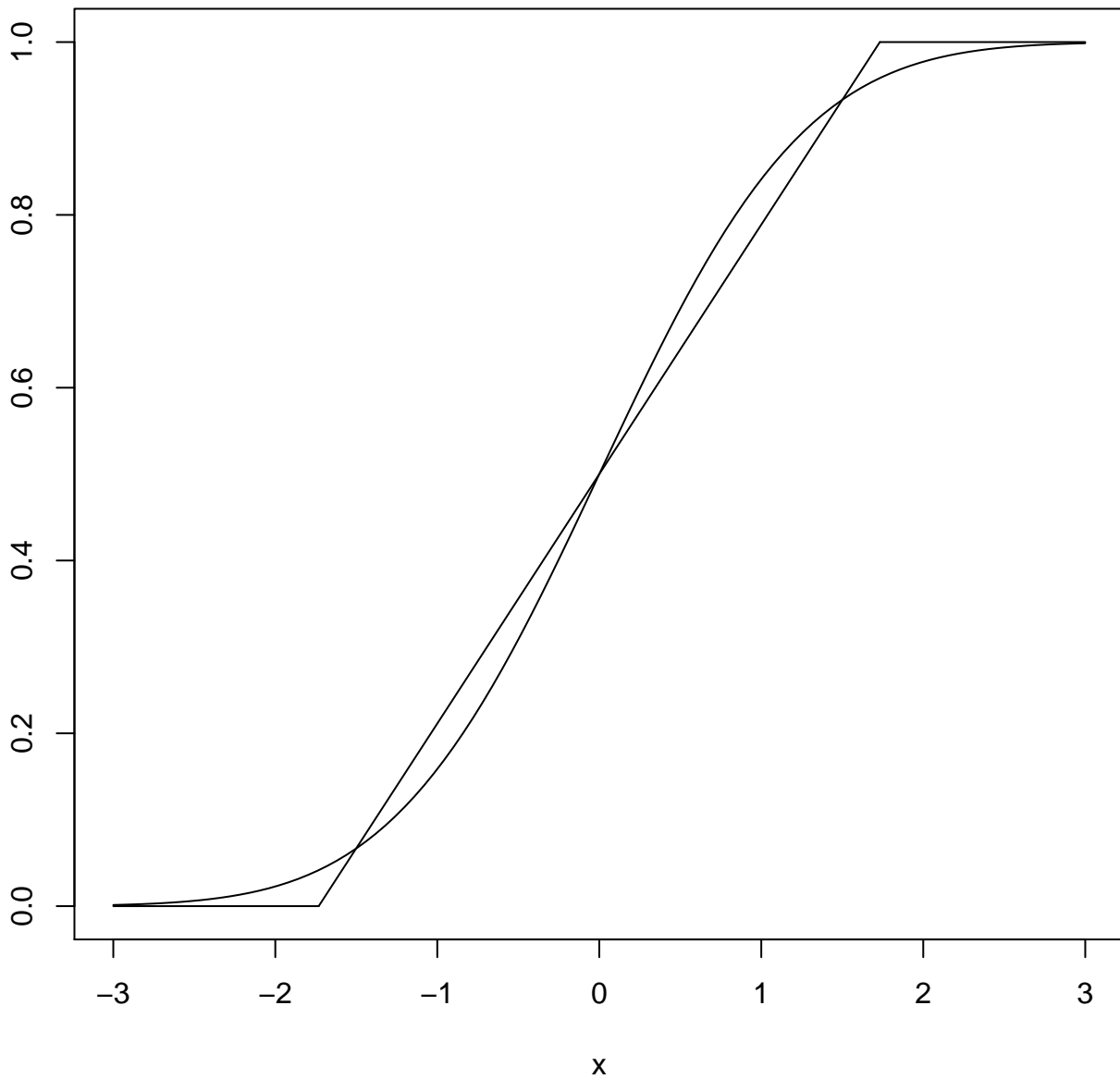
weil

$$E[Y] = 0 \quad \text{und} \quad V[Y] = 1$$

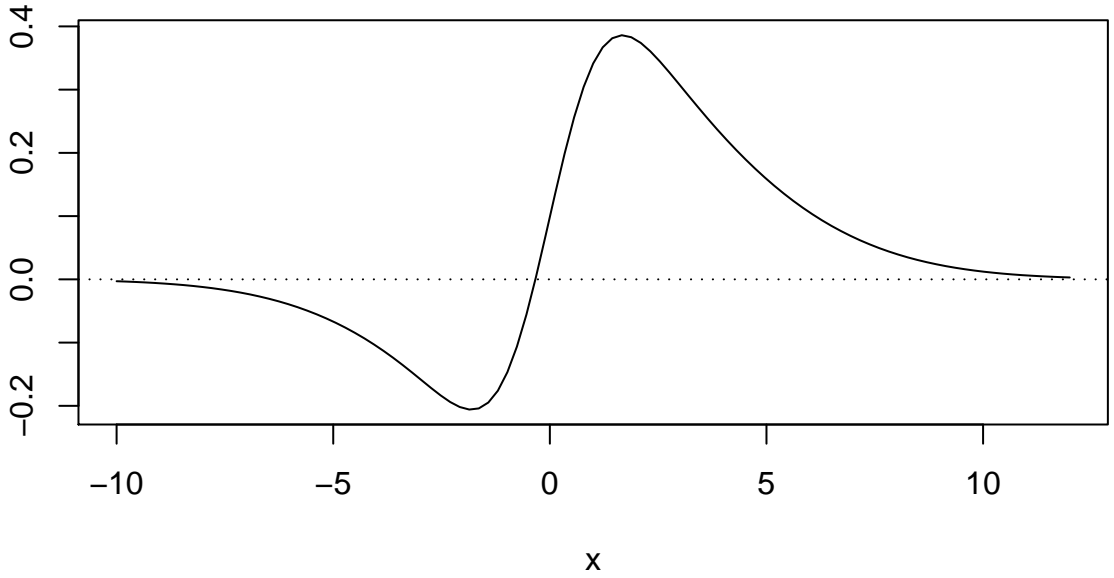
$$f(y) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad -\sqrt{3} < y < \sqrt{3}$$

$$d(F(y), \phi) = \max \left( \phi(-\sqrt{3}), \max_{(-\sqrt{3}, 0)} \left( \phi(y) - \frac{\sqrt{3} + y}{2\sqrt{3}} \right) \right) \\ \approx 0.057$$

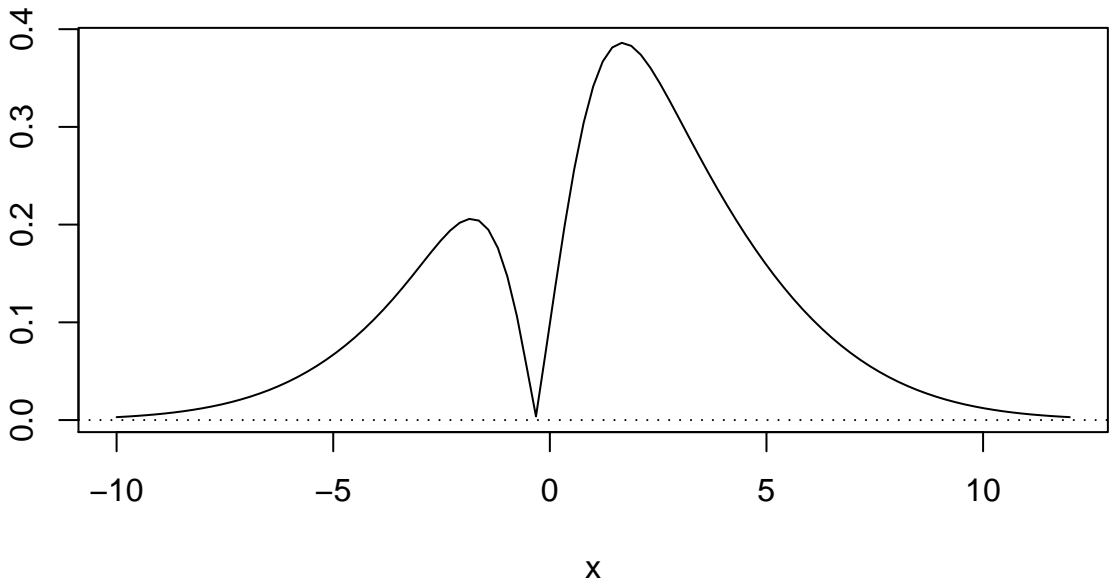
# Unterschied zwischen $U(-3^{0.5}, 3^{0.5})$ und $N(0,1)$



## Unterschied zwischen $N(0,1)$ und $N(1,4)$ Verteilungsfunktionen



## Absoluter Unterschied: $N(0,1)$ und $N(1,4)$ Verteilungsfunktionen



## 13.2 Berry-Esséen

Seien  $X_1, X_2, \dots$  u.i.v. Ist  $0 < \sigma^2 = V(X_i) < \infty$  und  $\gamma = E[|X - \mu|^3] < \infty$ , so gilt

$$d(S_n^*, \phi) \leq \frac{0.7655\gamma}{\sigma^3\sqrt{n}}$$

$$\left(\text{wo } S_n^* = \frac{\sum X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

### 13.2.1 Berry-Esséen und die Gleichverteilung

$$X_i \sim U(0, 1)$$

$$\mu = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sigma^2 = \frac{1}{12}$$

$$\gamma = E\left[\left|X - \frac{1}{2}\right|^3\right] = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 dx = \frac{1}{32}$$

$$d(S_n^*, \phi) \leq \frac{0.8 * \frac{1}{32}}{\left(\frac{1}{12}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{n}}$$

$$n = 12 \Rightarrow d(S_{12}^*, \phi) \leq 0.3$$

$$n = 300 \Rightarrow d(S_{300}^*, \phi) \leq 0.06$$

## 13.2.2 Berry-Esséen und die Exponentialverteilung

$$X \sim E(\lambda)$$

$$\mu = \lambda^{-1} \quad \text{und} \quad \sigma^2 = \lambda^{-2}$$

$$\gamma = E[|X - \mu|^3] = \frac{1}{\lambda^3}(12e^{-1} - 2)$$

$$d(S_n^*, \phi) \leq \frac{0.8 * \frac{1}{\lambda^3}(12e^{-1} - 2)}{(\frac{1}{\lambda})^3 \sqrt{n}}$$
$$\approx \frac{1.9316}{\sqrt{n}}$$

$$n = 12 \Rightarrow d(S_{12}^*, \phi) \leq 0.5576$$

$$n = 300 \Rightarrow d(S_{300}^*, \phi) \leq 0.1115$$

$$n = 30000 \Rightarrow d(S_{30000}^*, \phi) \leq 0.01115$$

Sei  $F(s)$  die genaue Verteilungsfunktion für  $n = 300$ , dann sagt das Resultat, dass

$$|F(s) - \phi(s)| \leq 0.1115$$

$$\phi(s) - 0.1115 < F(s) < \phi(s) + 0.1115$$

### 13.3 Das Gesetz vom iterierten Logarithmus

$\{X_i\}$  u.i.v.  $E[X] = 0$  und  $V[X] = 1$

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

Wir wissen aus dem SGGZ, dass

$$S_n/n \rightarrow 0 \quad \text{fast sicher}$$

und aus dem ZGS, dass

$$U_n = S_n/\sqrt{n} \rightarrow N(0, 1) \quad \text{in Verteilung}$$

Wie gross dürfen die (sehr seltenen) Fluctuationen von  $U_n$  sein? Es kann gezeigt werden, dass

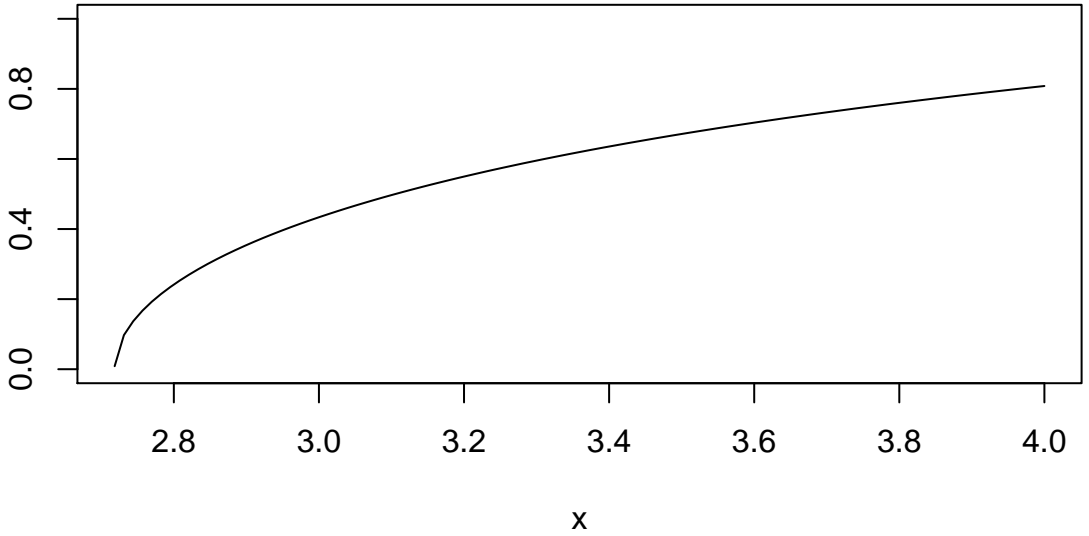
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{S_n}{\sqrt{2n \log \log n}} = 1 \quad \text{fast sicher} \quad (\lim \inf = -1)$$

Der Satz gilt auch für  $\{X_i\}$  u.i.v. im allgemeinen. Zum Beweis muß gezeigt werden, dass das Ereignis

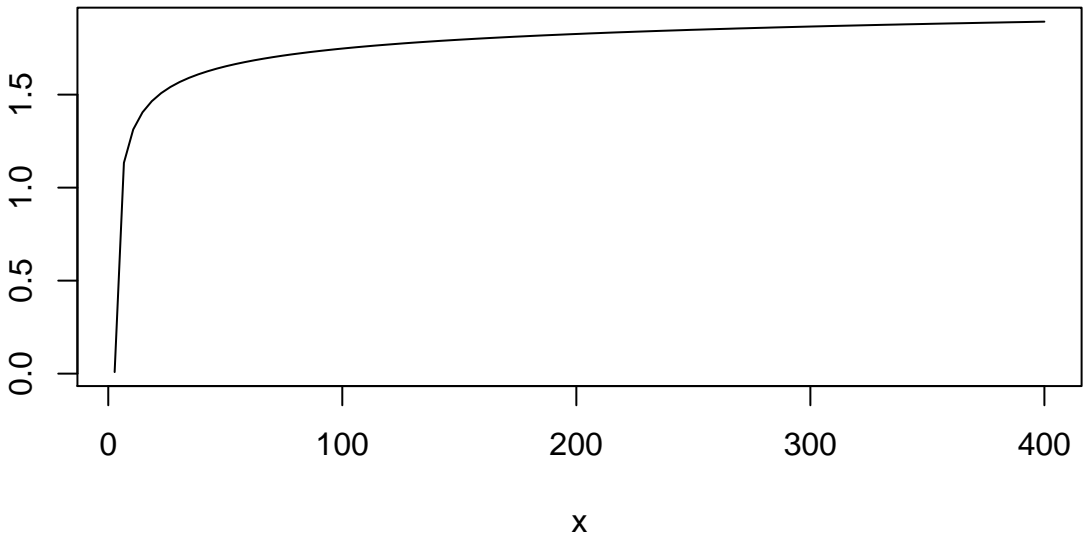
$$A_n = \{S_n \geq c\sqrt{2n \log \log n}\}$$

unendlich oft passiert für  $c < 1$  und nur endlich oft für  $c > 1$  mit Wahrscheinlichkeit 1.

### iteriertes Logarithmus ( $2\log(\log(n))^0.5$ )



### iteriertes Logarithmus ( $2\log(\log(n))^0.5$ )



## 13.4 Das Arcussinus Gesetz

Sei  $P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = 0.5$

und

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

Sei  $M_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  die Anzahl jener Partiellsummen  $S_k$ , die positiv sind, dann gilt

$$P\left(a \leq \frac{M_n(x_1, \dots, x_n)}{n} \leq b\right) \rightarrow \int_a^b \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}} dx$$

die Arcussinusverteilung über  $(0,1)$ .

Oder in anderer Form.

Sei  $L_{2N} = \max\{2n \leq 2N : S_{2n} = 0\}$  der Zeitpunkt des letzten Nullpunkts. Für alle  $0 < a < b < 1$  gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\left(a \leq \frac{L_{2N}}{2N} \leq b\right) = \int_a^b \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}} dx$$

## Beweis vom Arcussinus Gesetz

(1) Sei  $G_n = (S_{2n} = 0, S_{2k} \neq 0 \text{ für } 1 \leq k \leq n)$ , die erste Rückkehr zu 0 nach  $2n$  Schritten und sei

$$u_n = 2^{-2n} \binom{2n}{n}$$

dann ist

$$P(G_n) = u_{n-1} - u_n$$

Man veranschaulicht die Pfade von

$$x(1) = 1 \text{ bis } x(2n - 1) = 1$$

und von

$$x(1) = -1 \text{ bis } x(2n - 1) = 1$$

Mit Hilfe des Reflexionsprinzip fällt das Resultat aus.

(2) Sei  $G_{>n} = (S_{2k} \neq 0 \text{ für } 1 \leq k \leq n)$ , keine Rückkehr während der ersten  $2n$  Schritte.

$$P(G_{>n}) = u_n$$

weil  $P(G_{>n}) = \sum_{i=n+1}^{2N} P(G_n)$

(3) Sei  $P(L_{2N} = 2n)$  die Wahrscheinlichkeit dass die erste Rückkehr nach  $2n$  Schritten passiert und dass es keine weitere Rückkehr bis nach  $2N$  gibt.

$$\begin{aligned} &= u_n * u_{N-n} \\ &= 2^{-2N} \binom{2n}{n} \binom{2(N-n)}{N-n} \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Stirling Formel

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

folgt das Resultat.

# Arcsin Dichte (Beta(0.5,0.5))

