5.3 Normal Test
(z Test, Gauß Test)

Nullhypothese H_0**:** $\mu = \mu_0$

Teststatistik

Stichprobenmittelwert $\bar{x}$

Verteilung unter H_0

$N(\mu_0, \sigma^2/n)$ für n groß, σ^2 bekannt

Annahmebereich

$$\left[\mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

wo $P(Z > z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \dfrac{\alpha}{2}$

und $P(Z < z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \Phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = \dfrac{\alpha}{2}$ für $Z \sim N(0, 1)$

Ablehnungsbereich

$$(-\infty, \mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \cup (\mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty)$$

Typ I Fehler (Test-Niveau)

$$\alpha = 1 - \left(\Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \Phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)\right)$$

Alternativhypothese H_1**:** $\quad \mu = \mu_1$

Typ II Fehler

$$P\left(\mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} < \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} | \mu = \mu_1\right)$$

$$\Phi\left((\mu_0 - \mu_1)\frac{\sqrt{n}}{\sigma} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \Phi\left((\mu_0 - \mu_1)\frac{\sqrt{n}}{\sigma} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

Gütefunktion

$g(\mu_1) = 1 -$ Typ II Fehler

Statistische Signifikanz

		Resultate wären in der Praxis signifikant	Resultate wären in der Praxis nicht signifikant
Resultate sind statistisch	signifikant	1	2
	nicht signifikant	4	3

1. Die Forscher wissen, daß das Resultat wichtig ist, so daß Statistiker es natürlich als signifikant bewerten müssen.

2. Die Resultate sind für die Forscher wertlos. Ob sie statistisch signifikant sind ist dann bedeutungslos.

3. Keine Signifikanz irgendwelcher Art. Kein Mensch interessiert sich für die Resultate.

4. Die Forscher haben eine wunderbare Entdeckung gemacht und die Statistiker sagen, es gibt nicht genug Beweismaterial.

In den Fällen $1, 2$ und 3 hat die Meinung der Statistiker keinen Einfluß. Nur im Falle 4 macht sie was aus. Kein Wunder, daß die Statistik einen schlechten Ruf hat!

5.4 Andere Mittelwert-Tests

5.4.1 Eine Stichprobe

a) n klein, σ^2 bekannt, $X \sim N$: Normal Test
b) n klein, σ^2 unbekannt, $X \sim N$: t-Test $(n-1)$ df

5.4.2 Zwei unabhängige Stichproben $(X$ und $Y)$

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$
a) n_1, n_2 groß, σ_1^2, σ_2^2 bekannt: Normal Test
b) n_1 oder n_2 klein, σ_1^2, σ_2^2 bekannt, X und $Y \sim N$: Normal Test
c) n_1 oder n_2 klein, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ unbekannt, X und $Y \sim N$: t-Test $(n_1 + n_2 - 2)$ df

5.4.3 Zwei gepaarte Stichproben $(X_1$ und $X_2)$

z.B. links und rechts, Vater und Mutter, vor und nach
Für $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ untersucht man $Z = X_1 - X_2$ und $H_0 : \mu_d = \mu_1 - \mu_2 = 0$

5.4.4 Erläuterung der zwei Stichproben t-Test (§5.4.2(c))

n_1 oder n_2 klein
X und $Y \sim N$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ unbekannt

(i) $\{X_i\}$ u.i.v. normalverteilt

$$\Rightarrow (n_1 - 1)\frac{s_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{(n_1-1)}$$

(i) $\{Y_j\}$ u.i.v. normalverteilt

$$\Rightarrow (n_2 - 1)\frac{s_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{(n_2-1)}$$

$$\Rightarrow V = \left((n_1 - 1)\frac{s_1^2}{\sigma_1^2} + (n_2 - 1)\frac{s_2^2}{\sigma_2^2}\right) \sim \chi^2_{(n_1+n_2-2)}$$

Für den Fall $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ gilt

$$V = (n_1 + n_2 - 2)\frac{s_p^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n_1+n_2-2)}$$

wo $s_p^2 = \left((n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2\right) / (n_1 + n_2 - 2)$

$$U = \frac{((\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2))}{\sigma\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow t = \frac{U}{\sqrt{\left(\frac{V}{(n_1+n_2-2)}\right)}}$$

ist t-verteilt mit $(n_1 + n_2 - 2)$ Freiheitsgraden

5.4.5 Test für gepaarte Stichproben ($\Rightarrow n_1 = n_2$)

$\{X_i\}$ u.i.v. $\sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $\{Y_i\}$ u.i.v. $\sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$$X_i - Y_i \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

falls X_i und Y_i unabhängig sind.

Im algemeinen gilt

$$X_i - Y_i \sim N(\mu_1 - \mu_2, V(X_i - Y_i))$$

und

$$V(X_i - Y_i) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2Cov(X_i, Y_i)$$

Für X_i und Y_i nicht unabhängig sondern positiv korreliert gilt

$$Cov(X_i, Y_i) > 0 \text{ und } V(X_i - Y_i) < \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

Die Test-Statistik wird dann

$$t = ((\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)) \frac{\sqrt{n}}{s}$$

mit $(n-1)$ Freiheitsgraden wo

$$s^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum [(x_i - y_i) - (\bar{x} - \bar{y})]^2$$

(Eigentlich ist nur die Annahme notwendig, dass die Unterschiede $D = (X - Y)$ normalverteilt sind.)

Student von Student's t

W.S. Gosset (1876-1937)

Brauer bei Guinness in Dublin

"I think he [Gossett] was really the big influence in statistics... He asked the questions and Pearson or Fisher put them into statistical language and then Neyman came to work with the mathematics. But I think most of it stems from Gosset."

Florence David, Interview, Statistical Science 1989

5.4.5 Test für $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ unbekannt (Welch's t-test)

n_1 oder n_2 klein, X und $Y \sim N$
Wir wissen daß

$$U = \frac{((\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2))}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)}} \sim N(0,1)$$

$$V = \left((n_1 - 1)\frac{s_1^2}{\sigma_1^2} + (n_2 - 1)\frac{s_2^2}{\sigma_2^2}\right) \sim \chi^2_{(n_1+n_2-2)}$$

und $t = U/\sqrt{\frac{V}{n_1+n_2-2}}$ ist dann t-verteilt mit (n_1+n_2-2) Freiheitsgraden, aber σ_1^2 und σ_2^2 sind unbekannt.
Eine Möglichkeit ist die Teststatistik

$$t = \frac{((\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2))}{\sqrt{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)}}$$

zu benutzen und die Freiheitsgrade dadurch zu bestimmen, daß man eine zum Zähler "äquivalente" χ^2-verteilte Variable, W^2 findet. W^2 sollte denselben Erwartungswert und dieselbe Varianz wie $\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)$ haben.