K12 Grenzwertsätze

12.1 Gesetz der großen Zahlen (Konv. in Verteilung)

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von reellwertigen, u.i.v. ZV mit $E[X_i] = \mu < \infty$. Dann konvergiert die Folge

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

in Verteilung gegen μ.

Beweis

Der Satz besagt, dass

$$P(Z_n \leq x) \to \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x < \mu \\ 1 & \text{if} \quad x > \mu \end{cases}$$

Sie $\zeta_X(t)$ die CF von X_i und $\zeta_n(t)$ die CF von Z_n.

$$\zeta_n(t) = \left[\zeta_X\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n$$

Für $n \to \infty$ benutzen wir die Taylor Erweiterung

$$\zeta_X\left(\frac{t}{n}\right) \to 1 + \frac{i\mu t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)$$

und

$$\zeta_n(t) \to e^{it\mu}$$

die CF der gewünschten Verteilung.

12.1.1 Benötigte Resultate

Eindeutigkeit

ZV X und Y haben die gleiche CF wenn und nur wenn sie die identische Verteilungsfunktion haben.

Stetigkeitssatz

Sei $F_1, F_2, \ldots$ eine Folge von Verteilungsfunktionen mit entsprechenden CF $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$.

(a) Wenn $F_n \to F$ für eine Verteilungsfunktion F mit CF ζ, dann

$$\zeta_n(t) \to \zeta(t) \qquad \forall t$$

(b) Wenn $\zeta(t) = \lim_{n\to\infty} \zeta_n(t)$ existiert und ist bei $t = 0$ stetig, ist ζ die CF für eine Verteilungsfunktion F und $F_n \to F$

12.2 Der Zentrale Grenzwertsatz

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von reellwertigen, u.i.v. ZV mit

$$E[X_i] = \mu < \infty \quad \text{und} \quad V[X_i] = \sigma^2 < \infty$$

und sei

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Dann gilt, dass

$$U_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \to N(0,1)$$

in Verteilung.

Beweis

$Y_i = \frac{(X_i - \mu)}{\sigma}$ hat die CF $\zeta_Y(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

hat die CF

$$\psi_n(t) = \left\{ \zeta_y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right\}^n = \left\{ 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right) \right\}^n \to e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

für $n \to \infty$, die CF der gesuchten $N(0,1)$ Verteilung.

12.3 Anwendungen

(1) Binomial (De Moivre)

$$X \sim B(N, p)$$

$$N \to \infty \quad \Rightarrow \quad X \sim N(Np, Npq)$$

(2) Poisson

$$X \sim P(\lambda)$$

$$\lambda \to \infty \quad \Rightarrow \quad X \sim N(\lambda, \lambda)$$

(3) In der Statistik

Seien $\{X_i\}$ u.i.v. ZV mit $E[X] = \mu$ und $V[X] = \sigma^2$, dann gilt

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

12.4 Konvergenz

(1) In Verteilung

$$\text{für} \quad n \to \infty \quad P(X_n \le x) \to P(X \le x)$$

(2) In Wahrscheinlichkeit

$$\text{für} \quad n \to \infty \quad P(|X_n - X| > \epsilon) \to 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

(3) Fast sicher

$$\text{für} \quad n \to \infty \quad P(X_n(\omega) \ \to X(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega) = 1$$

$$(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$$

z.B.
Sei X eine ZV mit $P(X = 0) = P(X = 1) = 0.5$ und $X_i = X \quad \forall i$. $X_n \to X$ in Verteilung und für $Y = 1 - X$ gilt auch $X_n \to Y$ in Verteilung. Aber $|X_n - Y| = 1$ immer, so dass (2) und (3) nicht gelten können.

12.4.1 Konv. in Wahrscheinlichkeit $\Rightarrow$ K in Verteilung

$$F_n(x) = P(X_n \le x)$$

$$= P(X_n \le x, X \le x + \epsilon) + P(X_n \le x, X > x + \epsilon)$$

$$\le F(x + \epsilon) + P(|X_n - X| > \epsilon)$$

Ähnlich findet man

$$F(x - \epsilon) \le F_n(x) + P(|X_n - X| > \epsilon)$$

Deshalb gilt

$$F(x - \epsilon) - P(|X_n - X| > \epsilon) \le F_n(x)$$

$$\le F(x + \epsilon) + P(|X_n - X| > \epsilon)$$

Für $n \to \infty$ und $\forall \epsilon > 0$

$$F(x - \epsilon) \le \liminf F_n(x) \le \limsup F_n(x) \le F(x + \epsilon)$$

Wenn F stetig ist, folgt das Resultat.

12.5 Das schwache Gesetz der großen Zahlen

Für das schwache Gesetz der großen Zahlen gilt Konvergenz in Wahrscheinlichkeit (stochastische Konvergenz).

Seien $X_1, X_2, \ldots X_n$ unabhängige ZV mit gleichem Erwartungswert und Varianzen

$$V[X_i] \leq M < \infty \quad \forall i$$

Dann gilt $\forall \epsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - E[X]\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{M}{n\epsilon^2} \to 0$$

Beweis

Sei

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$E[Y_n] = E[X]$$

$$V[Y_n] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V[X_i] \leq \frac{M}{n}$$

Dann wendet man Tschebychew an.

12.6 Grenzwert-Resultate Beispiel

$$X_i \sim U(0,1) \quad \text{u.i.v.}$$

$$E[X_i] = \frac{1}{2} \qquad V[X_i] = \frac{1}{12}$$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad E[\bar{X}_n] = \frac{1}{2} \quad V[\bar{X}_n] = \frac{1}{12n}$$

Tschebychew:

$$P\left(\left|\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{12n\epsilon^2}$$

Schwaches Gesetz:

$$P\left(\left|\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right| \geq \epsilon\right) \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

Starkes Gesetz:

$$P\left(\left|\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right| \geq \epsilon \quad \forall n > N_\epsilon\right) \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

Zentraler Grenzwert Satz:

$$P\left(\left|\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right| \geq \epsilon\right) \to 2\int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\sqrt{12n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-6nt^2} \mathrm{d}t$$

$$= 2(1 - \Phi(\sqrt{12n}\epsilon))$$

12.7 Fast sichere Konvergenz (starkes GGZ)

12.7.1 Hilfesatz

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.
Ist $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \ldots$ eine fallende Folge von Ereignissen mit Durchschnitt A_∞ so gilt

$$P(A_\infty) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$$

Ist $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \ldots$ eine wachsende Folge von Ereignissen mit Vereinigung B_∞ so gilt

$$P(B_\infty) = \lim_{i \to \infty} P(B_i)$$

Beweis

Für jedes n ist A_n die disjunkte Vereinigung von A_∞ und den Differenzen $D_i = A_i \setminus A_{i+1} = A_i \cap A_{i+1}^c$

$$\Rightarrow P(A_n) = P(A_\infty) + \sum_{i=n}^{\infty} P(D_i)$$

Da die D_i disjunkt sind, konvergiert $\sum\limits_{i=n}^{\infty} P(D_i)$ und

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=n}^{\infty} P(D_i) \to 0$$

Zum Beweis vom zweiten Teil setzen wir

$$A_i = B_i^c$$

dann

$$B_\infty = A_\infty^c$$

und

$$\begin{aligned} P(B_\infty) &= 1 - P(A_\infty) \\ &= \lim_{i\to\infty} (1 - P(A_i)) \\ &= \lim_{i\to\infty} P(B_i) \end{aligned}$$

12.7.2 Fast sichere Konv. $\Rightarrow$ stochastische Konvergenz

(Aber nicht umgekehrt) cf. §12.4

Sei $\epsilon > 0$

$$B_N = \{\omega \in \Omega : |Y_n(\omega) - Y(\omega)| < \epsilon \quad \forall n \geq N\}$$

bilden eine wachsende Folge und $\cup B_N \supset A$ wo

$$A := \{\omega : \lim Y_n(\omega) = Y(\omega)\}$$

Fast sichere Konvergenz

$$\Rightarrow P(A) = 1$$

$$\Rightarrow P(B_\infty) = 1$$

(nach dem Hilfesatz im §12.7.1)

$$\Rightarrow \lim_{N \to \infty} P(B_N) \to 1$$

Also gilt

$$P(|Y_N - Y| \geq \epsilon) \leq P(B_N^c) \to 0$$

12.7.3 Gegenbeispiel zum umgekehrten Resultat

$\Omega = [0, 1)$ und eine Gleichverteilung P.

Sei $c_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ und

$$A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ liegt mod 1 in } [c_{n-1}, c_n]\}$$

Die Folge $Y_n = I_{A_n}$ konvergiert stochastisch gegen 0, denn für $0 < \epsilon < 1$

$$P(|Y_n - 0| \geq \epsilon) = P(A_n) = \frac{1}{n} \to 0$$

Für jedes $\omega \in \Omega$ und für jedes N existieren Zahlen $m, n \geq N$ mit

$$\omega \in A_m \text{ und } \omega \in A_n^c$$

Also gilt für jedes ω

$$\liminf Y_n(\omega) = 0$$

und

$$\limsup Y_n(\omega) = 1$$

12.7.4 Lemma von Borel-Cantelli

Für ein Folge von Ereignissen $A_1, A_2, \ldots$ sei

$$A^* := \{\omega \in \Omega : \omega \in A_k \text{ für unendlich viel } k\}$$

$$\text{(1) Gilt } \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty, \text{ ist } P(A^*) = 0$$

(2) Sind die A_k u. und $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \infty$, ist $P(A^*) = 1$

Beweis (1)

$\omega \in \Omega$ gehört zu A^*

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k$$

Für jedes n

$$P(A^*) \leq P(\bigcup_{k \geq n} A_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \to 0$$

(2)

$$P(\bigcap_{k=n}^{N} A_k^c) = \prod_{k=n}^{N} (1 - P(A_k)) \leq e^{(-\sum_{k=n}^{N} P(A_k))}$$

da für $0 \leq \alpha_i \leq 1$ gilt $1 - \alpha_i \leq e^{-\alpha_i}$
Bei festem n, lassen wir $N \to \infty$

$$e^{(-\sum_{k=n}^{N} P(A_k))} \to 0$$

$$\Rightarrow P(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c) = 0$$

$$\Rightarrow P((A^*)^c) = 0 \quad \text{da} \quad (A^*)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c$$

$$\Rightarrow P(A^*) = 1$$

Eine Aussage gilt für fast alle ω (fast sicher, fast überall), wenn die Menge B der ω für die sie nicht gilt $P(B) = 0$ hat.

12.8 Das starke Gesetz der großen Zahlen
Sei $\{X_i\}$ eine Folge von reellwertigen unkorrelierten ZV und

$$V[X_i] \leq M < \infty \quad \forall i$$

dann konvergiert die Folge

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - E[X_i])$$

fast sicher gegen 0.

Beweis
Zuerst zeigen wir, dass Z_{n^2} fast sicher gegen 0 konvergiert. o.B.d.A.

$$E[X_i] = 0$$

Da

$$Cov(X_i, X_j) = 0 \quad i \neq j$$

$$V[Z_{n^2}] = \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n^2} V[X_i] \leq \frac{M}{n^2}$$

Nach Tschebychew

$$P(|Z_{n^2}| \geq \epsilon) \leq \frac{M}{\epsilon^2 n^2}$$

Setzen wir

$$A_n = \{|Z_{n^2}| \geq \epsilon\}$$

$$\sum P(A_n) \leq \frac{M}{\epsilon^2} \sum \frac{1}{n^2} < \infty$$

(Deshalb haben wir n^2 genommen statt n.)
Nach Borel-Cantelli folgt, dass fast jedes ω nur zu endlich vielen A_n gehört.
Setzen wir $\epsilon = \frac{1}{k}$

$$E_k = \{\omega : |Z_{n^2}(\omega)| \geq \frac{1}{k} \text{ für unendlich viel } n\}$$

$$\Rightarrow P(E_k) = 0$$

$$\Rightarrow P(E) = P(\bigcup_k E_k) = 0$$

Für $\omega \in E^c$ gibe es zu jedem k nur endlich viel n mit

$$|Z_{n^2}(\omega)| \geq \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \lim Z_{n^2}(\omega) = 0$$

Jetzt für alle $m \in N$ sei $n = n(m)$ die natürliche Zahl

$$n^2 \leq m < (n+1)^2$$

Sei

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i = kZ_k$$

$$V[S_m - S_{n(m)^2}] = \sum_{i=n^2+1}^{m} V[X_i] \leq M(m - n^2)$$

Nach Tschebychew, für $\epsilon > 0$

$$P(|S_m - S_{n(m)^2}| \geq \epsilon n^2) \leq \frac{M(m-n^2)}{\epsilon^2 n^4}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} P\left(\frac{1}{n(m)^2}|S_m - S_{n(m)^2}| \geq \epsilon\right)$$

$$\leq \frac{M}{\epsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n^2}^{(n+1)^2-1} \frac{m - n(m)^2}{n(m)^4}$$

$$\leq \frac{M}{\epsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}(1 + 2 \ldots + 2n)$$

$$= \frac{M}{\epsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(2n+1)}{2n^4} < \infty$$

Nach Borel-Cantelli folgt für fast alle ω für hinreichend großes m

$$\frac{1}{n(m)^2} |S_m(\omega) - S_{n(m)^2}(\omega)| < \epsilon$$

Vom ersten Teil des Beweises

$$|Z_{n^2}| < \epsilon$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2} |S_{n^2}| < \epsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{S_m}{n^2} \right| < 2\epsilon$$

$$\Rightarrow |Z_m| < 2\epsilon$$