K1 Was ist Wahrscheinlichkeit?

1.1 Ereignisse

Der einzelne Ausgang ist unbekannt, aber die Menge aller möglichen Ausgänge ist bekannt.

- Elementarereignisse $\{\omega\}$

- Ereignisraum Ω
  (Stichprobenraum)

- Ereignis $A \subseteq \Omega$
  (Ausgang)

- Wahrscheinlichkeitsmaß P

Interpretationen

$A \cup B$ Ereignis A oder B tritt ein

$A \cap B$ beide Ereignisse A und B treten ein

$\bigcup_{n=1} A_n$ mindestens eines von A_n tritt ein

$\bigcap_{n=1} A_n$ alle A_n treten ein

Zwei Ereignisse A und B sind disjunkt, wenn sie keine Elementarereignisse gemeinsam haben:

$$A \cap B = 0$$

1.3 Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten

Sind die Situationen identisch?

- Kombinatorische Bestimmung
  (Abzählen von Fällen)

- Statistische Schätzungen
  (Wie häufig ist es vorher aufgetreten?)

- Logische Überlegungen
  (Abgeleitet von Struktur)

1.4
Interpretation von Wahrscheinlichkeiten

- Relative Häufigkeit

  Es gibt eine unendliche Zahl von identischen Situationen, bei denen ein Ereignis A auftreten kann. Die Anzahl der n Versuche, bei denen A eintritt, heißt die absolute Häufigkeit des Ereignisses A, $h_n(A)$, und die relative Häufigkeit von A ist gleich

  $$h_n(A)/n$$

  Da relative Häufigkeiten, selbst bei noch so großem n, von der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit beliebig weit entfernt sein können, gibt es Probleme.

- Subjektive Wahrscheinlichkeit

1.5 Axiome von Kolmogoroff (1933)

Eine Abbildung P von P(Ω) in [0,1] heißt Wahrscheinlichkeitsmaß wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:

- $P(\Omega) = 1$

- $P(A) \geq 0$ für alle A

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
  wenn A, B disjunkt sind

Ω ist eine nicht leere Menge der möglichen Versuchsergebnisse
F ist die Menge der Ereignisse, A_1, A_2, A_3,.... die uns interessieren.
P(A) ist die Wahrscheinlichkeit von A.

Das Tupel **(Ω, F, P)** heißt der dem Experiment zugeordnete Wahrscheinlichkeitsraum.

1.5.1 Folgerungen aus den Axiomen

Für A, B, $A_i \in \mathbf{F}$ gilt

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0$
- Aus $A \subset B$ folgt $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

  wobei $(A \setminus B = A \cap \overline{B})$
- Wenn A_i disjunkt sind gilt

  $$P(\cup A_i) = \sum P(A_i)$$
- Sonst gilt für beliebige $A_1, A_2, A_3, \ldots.$

  $$P(\cup A_i) \leq \sum P(A_i)$$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

1.6 Ein bisschen Geschichte

3500 v.C.	Astragli in Ägypten (Huftknochen von Schafen)
1600 v.C.	sechs-seitiger Würfel
1565 (?)	*Liber de Ludo Aleae* (Handbuch des Glückspiels) Cardano (1501-1576)
1654	Briefwechsel Pascal-Fermat
1655	*De ratiocinates in Aleae Ludo* (Zur Berechnung von Glückspielen) Huygens (1629-1695)
1713	*Ars Conjectandi* Jakob Bernoulli (1654-1705)
1730	*The Doctrine of Chances* Abraham de Moivre (1667-1754)

Und...

Galileo Galilei (1564-1642)

Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

Siméon Poisson (1781-1840)

Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

Pafnuty Chebyshev (1821-1894)

Andrei Markov (1856-1922)

Émile Borel (1871-1956)

Andrei Kolmogorov (1903-1987) löste das Wahrscheinlichkeitsteil des sechsten Problems von David Hilbert (Paris 1900)

1.7 Unabhängigkeit

Ereignisse A und B heißen unabhängig wenn

$$P(A \cap B) = P(A)*P(B)$$

$\Rightarrow P(A) = P(A \mid B)$ und $P(B) = P(B \mid A)$

$P(A \mid B)$ ist die Wahrscheinlichkeit von Ereignis A gegeben Ereignis B

Dieses Konzept ist ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Konzept.

z.B.
Beim Werfen eines Würfels
sei A: gerade Zahl und B: > 3
dann gelten $P(A) = 1/2$ und $P(A \mid B) = 2/3$

Sei A: gerade Zahl und B: > 2
dann gelten $P(A) = 1/2$ und $P(A \mid B) = 1/2$

Stochastische Unabhängigkeit

Wir haben schon die Unabhängigkeit von zwei Ergebnissen besprochen:

A,B unabhängig $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)*P(B)$

Die Verallgemeinerung ist komplizierter:

$A_1, A_2, A_3, ...A_m$ sind unabhängig

$\Leftrightarrow$

$P(\cap A_j) = \prod P(A_j)$ für jede Teilfamilie

Falls $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)*P(A_j)$ für jedes Paar A_i, A_j gelten sollte, sind $A_1, A_2, A_3, ...A_m$ paarweise unabhängig aber nicht unbedingt unabhängig.

Beispiel:

Beim zweimaligen Werfen einer Münze:

$A_1 = \{1. \text{ Wurf Kopf}\}$

$A_2 = \{2. \text{ Wurf Zahl}\}$

$A_3 = \{\text{Beide verschieden}\}$

$P(A_1) = 1/2,\ P(A_2\ ) = 1/2,\ P(A_3\ ) = 1/2$

$P(A_1 \cap A_2) = 1/4 = P(A_1)*P(A_2)$

$P(A_1 \cap A_3) = 1/4 = P(A_1)*P(A_3)$

$P(A_2 \cap A_3) = 1/4 = P(A_2)*P(A_3)$

=> jedes Paar A_i, A_j ist unabhängig

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1/4 \neq P(A_1)*P(A_2)*P(A_3)$

=> A_1, A_2, A_3 sind nicht unabhängig