9.1 Bedingte Wahrscheinlichkeiten im stetigen Fall

(cf. §4.1 - §4.3 für den diskreten Fall)

Sei $f_{XY}(x,y)$ die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen X und Y. Aus Satz 7.7.1 gilt, dass

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

nur, wenn X und Y unabhängig sind. Sonst verwenden wir

$$\begin{aligned}
P(x_1 < X \leq x_2) &= \int_{x_1}^{x_2} \int_y f_{XY}(x,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \int_y f_{Y|X}(y|x) f_X(x) \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_y f_{Y|X}(y|x) \mathrm{d}y \right) f_X(x) \mathrm{d}x \\
&= \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$f_X(x)$ ist die Randverteilung (Marginalverteilung) von X
$f_{Y|X}(y|x)$ ist die bedingte Verteilung von $Y|X$

9.2 Bayes im stetigen Fall

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

oder

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x) f_X(x)}{\int_x f_{Y|X}(y|x) f_X(x) \mathrm{d}x}$$

z.B. Die Leistungen zwei Sportler, A und B, werden im Voraus mit den Verteilungen $f_A(t_A)$ und $f_B(t_B)$ geschätzt. Wenn Sie nachher nur die Information haben, dass A tatsächlich einen kleineren Wert als B erreichte, wie sieht Ihre Verteilung für A dann aus?

$$f(t_A|t_A < t_B) = \frac{f_A(t_A) \int_{t_A}^{\infty} f_B(t_B) \mathrm{d}t_B}{\int_A f_A(t_A) \int_{t_A}^{\infty} f_B(t_B) \mathrm{d}t_B \mathrm{d}t_A}$$

Mit $T_A \sim E(\lambda_A)$ und $T_B \sim E(\lambda_B)$ findet man

$$f(t_A|t_A < t_B) = (\lambda_A + \lambda_B) e^{-(\lambda_A + \lambda_B) t_A}$$

9.3 Längen von Intervallen und Wartezeiten

9.3.1 Durchschittliche Intervalllänge Sei die Dichte der Länge eines Zeitintervalls, X, $f(x)$ sein ($x \geq 0$). Wir wählen per Zufall einen Zeitpunkt aus, wie groß ist das Intervall um diesen Punkt?

$$g(y) \propto y f(y) = \frac{y f(y)}{E[X]}$$

weil

$$\int_y g(y) \mathrm{d}y = 1 \quad \text{und} \quad \int_x x f(x) \mathrm{d}x = E[X]$$

Dann

$$E[Y] = \frac{\int\limits_o^\infty y^2 f(y) \mathrm{d}y}{E[X]} = \frac{E[X^2]}{E[X]} = \frac{V[X] + E[X]^2}{E[X]}$$

$$\text{z.B.} \quad X \sim E(\lambda) \Rightarrow E[Y] = \frac{2}{\lambda}$$

Der Durchschnitt der getroffenen Intervalle ist zweimal so lang wie das durchschnittliche Intervall.

9.3.2 Verteilung von Wartezeiten

$$
\begin{aligned}
P(\text{ Wartezeit } \leq t | \text{ Länge } = y) &= 1 \qquad y \leq t \\
&= \frac{t}{y} \qquad y > t
\end{aligned}
$$

Hier wird angenommen, dass die Ankunftszeit innerhalb eines Intervalls gleichverteilt ist — was sollte man sonst annehmen?

$$
\begin{aligned}
H(t) &= P(\text{ Wartezeit } \leq t) \\
&= \int_0^t g(y)\mathrm{d}y + \int_t^\infty \frac{t}{y} g(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^t \frac{x}{\mu_X} f(x)\mathrm{d}x + \int_t^\infty \frac{t}{\mu_X} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\mu_X}\left(\int_0^t x f(x)\mathrm{d}x + t(1 - F(t))\right)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} &= h(t) \\
&= \frac{1}{\mu_X}(tf(t) + 1 - F(t) - tf(t)) \\
&= \frac{1 - F(t)}{\mu_X}
\end{aligned}
$$

$$\text{wo} \quad \mu_X = E[X]$$

Wartezeiten Beispiel

Sei $X \sim E(\lambda)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda e^{-\lambda t} \\ h(t) &= \frac{1}{\mu_X} e^{-\lambda t} \\ &= \lambda e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

also auch $E(\lambda)$. Dank der Symmetrie hat die Zeit seit dem letzten Ereignis auch die Exponentialverteilung.

Ist es möglich, dass E[Wartezeit] $>$ E[Intervalllänge]?

$$\begin{aligned} E[W] &= \int_0^\infty \frac{t(1-F(t))}{\mu_X} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\mu_X}\left[\frac{1}{2}t^2(1-F(t))\right]_0^\infty + \frac{1}{2\mu_X}\int_0^\infty t^2 f(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\frac{E[X^2]}{E[X]} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E[W] > E[X] \text{ wenn } E[X^2] > 2E[X]^2$$

z.B. in der Familie

$$f(x) = p\lambda e^{-\lambda x} + (1-p)\mu e^{-\mu x} \qquad 0 < p < 1$$

Mischungen von Exponentialverteilungen

K 17 Bedingte Verteilungen

$$X \sim g(x;\mu)$$

d.h. die ZV X hat eine Dichte $g(x)$ die von einem Parameter μ abhängt. z.B.

$$P(\mu = 1) = p \qquad P(\mu = 0) = 1 - p$$

$$\Rightarrow g(x) = pg(x;1) + (1-p)g(x;0)$$

Wir betrachten auch μ als eine ZV.

Im allgemeinen Fall, wo μ die Dichte $h(\mu)$ hat, gilt

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_\mu g(x;\mu)h(\mu)\mathrm{d}\mu \\ &= E_\mu[g(x;\mu)] \end{aligned}$$

17.1 Bedingte Verteilungen — Beispiele

$$(1) \quad X \sim P(\lambda) \qquad \lambda \sim \Gamma(a, b)$$

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \int_0^\infty \frac{a^b}{\Gamma(b)} \frac{1}{\Gamma(x+1)} \lambda^{x+b-1} \, e^{-\lambda(a+1)} \mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{\Gamma(x+b)}{\Gamma(x+1)\Gamma(b)} \frac{a^b}{(a+1)^{x+b}} \end{aligned}$$

weil

$$\int_0^\infty k \, \lambda^{x+b-1} e^{-\lambda(a+1)} \mathrm{d}\lambda = 1$$

(ein Resultat aus der $\Gamma(a+1, b+x)$ Dichte)

Für $b \in \mathbb{Z}^+$ gilt

$$P(X = x) = \binom{x+b-1}{x} \left(\frac{1}{a+1}\right)^x \left(\frac{a}{a+1}\right)^b$$

eine Negativbinomialverteilung. Deshalb werden die Poissonverteilung und die NB-Verteilung für ähnliche Anwendungen benutzt.

Was ist die Dichte von $\lambda|X = x$?

$$\begin{aligned} f_\lambda(\lambda|X = x) &= \frac{e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \frac{a^b}{\Gamma(b)} \lambda^{b-1} e^{-a\lambda}}{P(X = x)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(a+1)} w^{x+b-1}}{\Gamma(x + b)} (a + 1)^{x+b} \end{aligned}$$

Eine Gammaverteilung $\Gamma(a + 1, x + b)$

Vorher (apriori) gilt

$$E[\lambda] = \frac{b}{a}$$

Nachher (aposteriori) gilt

$$E[\lambda|X] = \frac{b + x}{a + 1}$$

$$(2) \quad X \sim N(\theta, \sigma^2) \qquad \theta \sim N(\mu_0, \tau_0^2)$$

Man kann zeigen, dass

$$X \sim N(\mu_0, \sigma^2 + \tau_0^2)$$

und

$$f(\theta|X=x) = \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\theta)}{\sigma}\right)^2} \frac{1}{\tau_0\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(\theta-\mu_0)}{\tau_0}\right)^2}}{\int\limits_\theta}$$

$$\sim N\left(\frac{\frac{\mu_0}{\tau_0^2} + \frac{x}{\sigma^2}}{\frac{1}{\tau_0^2} + \frac{1}{\sigma^2}},\ \frac{1}{\frac{1}{\tau_0^2} + \frac{1}{\sigma^2}}\right)$$

$\Rightarrow$

$$\theta|X = x \sim N(\mu_1, \tau_1^2)$$

wo

$$\mu_1 = \mu_0 + (x - \mu_0)\frac{\tau_0^2}{\sigma^2 + \tau_0^2}$$

$$\frac{1}{\tau_1^2} = \frac{1}{\tau_0^2} + \frac{1}{\sigma^2}$$