18.6.4 Methoden für Normal ZV
(1) Ein alter Vorschlag
Erzeugen $\{u_i, i = 1, \ldots 12\}$ u.i.v. aus $G(0, 1)$
und nehmen

$$x = \sum u_i - 6$$

Dann gilt

$$E[X] = 0 \quad \text{und} \quad V[X] = 1$$

und mit einer sehr optimistischen Interpretation der ZGW

$$X \sim N(0, 1)$$

Diese Methode liefert eine schlechte Approximation und ist langsam.

(2) Box-Muller
Seien U_1 und U_2 u.i.v. $\sim U(0, 1)$, dann sind

$$X_1 = \sqrt{-2 \log U_1} \cos 2\pi U_2$$

$$X_2 = \sqrt{-2 \log U_1} \sin 2\pi U_2$$

u.i.v. normalverteilt. $X_1, X_2 \sim N(0, 1)$ Es stellt sich heraus, dass Box-Muller etwas aufwendig ist und dass es effizientere Ablehnungsmethoden gibt.

Transformationen von stetigen Zufallsvariablen

Den eindimensionalen Fall haben wir im $\S 8.8$ behandelt und die Summe von zwei Zufallsvariablen im $\S 8.9$. Für eine allgemeine Funktion von zwei Zufallsvariablen gilt das folgende Ergebnis:

Seien X und Y Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Verteilung $f_{XY}(x,y)$. Man möchte die Verteilung der Zufallsvariablen U und V, wo

$$U = g_1(X,Y) \text{ und } V = g_2(X,Y)$$

und diese Transformationen umkehrbar sind, so dass

$$X = h_1(U,V) \text{ und } Y = h_2(U,V)$$

Unter den Annahmen, dass g_1 und g_2 stetig partiell differenzierbare Funktionen sind und dass $\forall(x,y)$ die Determinante der Jacobi-Matrix

$$J(x,y) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{bmatrix} \neq 0$$

gilt

$$f_{UV}(u,v) = f_{XY}(h_1(u,v), h_2(u,v))|J^{-1}(h_1(u,v), h_2(u,v))$$

Box-Muller Beweis

$$f(u_1, u_2) = 1 \qquad 0 \le u_1 \le 1 \quad 0 \le u_2 \le 1$$

$$u_1 = e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)}$$

$$u_2 = \frac{1}{2\pi} \sin^{-1} \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

und man könnte transformieren.

Leichter geht es in die andere Richtung. Wir fangen mit X_1, X_2 u.i.v. $\sim N(0,1)$ an, und transformieren

$$X_1 = R \sin\theta \qquad X_2 = R\cos\theta$$

$$g(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} r e^{-\frac{1}{2}r^2}$$

$$0 \le r < \infty \qquad 0 \le \theta < 2\pi$$

so dass R und θ unabhängig sind. Nach den weiteren Transformationen

$$U_1 = e^{-\frac{1}{2}r^2} \quad \text{und} \quad U_2 = \frac{\theta}{2\pi}$$

gilt $\quad h(u_1, u_2) = 1$ für $0 \le u_1 \le 1 \quad 0 \le u_2 \le 1$

18.6.5 Wie lang muss man simulieren?

Sei das Ziel einer Simulation, den unbekannten Wert p zu schätzen, wo p die Wahrscheinlichkeit eines Resultats sei. Sei M die Länge der Simulation und sei X die Anzahl Fälle, wo das Resultat auftrete. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} X & \sim & B(M,p) \\ \text{für } M \to \infty \qquad X & \sim & N(Mp, Mp(1-p)) \\ R = \dfrac{X}{M} & \sim & N\left(p, \dfrac{p(1-p)}{M}\right) \end{array}$$

$\Rightarrow 0.99 =$

$$P\left(p - 2.576\sqrt{\frac{p(1-p)}{M}} < R < p + 2.576\sqrt{\frac{p(1-p)}{M}}\right)$$

Für $p \approx 0.5, M = 10^5 \Rightarrow$
$P(p - 0.004 < R < p + 0.004) = 0.99$

Für eine Standardumfrage mit $M = 1000$ gelten

$$\begin{array}{rcl} P(p - 0.04 < R < p + 0.04) & = & 0.99 \\ P(p - 0.03 < R < p + 0.03) & = & 0.95 \end{array}$$

18.7 Ein Verkehrsbeispiel

Autos fahren in einer Richtung. Es gibt einen Ampel, der 2 Minuten rot, 2 Minuten grün bleibt.

Wieviele Autos können pro Stunde durchfahren?

Was passiert, wenn die Anzahl Ankünfte Poissonverteilt ist?

Wie lange brauchen Autos, um durchzufahren?

Wie könnte man die Variabilität modellieren?

Wie sollte man Abbiegen modellieren?

Welche Wirkungen könnte Verkehr aus anderen Richtungen haben?

Welchte Komplikationen könnte es bringen, wenn es mehrere Spuren gibt?

(Andere Faktoren: Lastwagen, Radfahrer, Fussgänger, Wetter, Unfälle, Pannen,....)

18.8 Weitere Beispiele

18.8.1 Betreibung einer Lotterie

Die Losauflage ist N. Es werden R_i Preise der Größe M_i ausgelost. Jedes Los kann einen Preis von jeder Größe gewinnen. Wenn n Lose verkauft werden, was ist die Verteilung der ausgezahlten Gewinne?

18.8.2 Pokerspiel

Die Kartenverteilung kann man leicht simulieren. Wie sollen verschiedene Spielstrategien simuliert werden?

18.8.3 Tiere zählen. Methoden prüfen.

Hyänen im Kruger National Park (Südafrika)

Wale