K2 Kombinatorik

Annahme: Ereignisse gleichwahrscheinlich

$$P(\text{Ausgang}) = \frac{\#(\text{„günstige" Fälle})}{\#(\text{alle Fälle})}$$

2.1 Permutationen

Aus n verschiedenen Elementen kann man unter Berücksichtigung der Reihenfolge und ohne Rücklegung
k Stück ($1 \leq k \leq n$) auf

$$n.(n-1).(n-2)....(n-k+1) = n!/(n-k)! \qquad (2.1.1)$$

verschiedene Arten auswählen.

n Objekte, von denen n_1, n_2, n_3, ...n_r gleich sind, #Anordnungen =

$$n!/(n_1!\, n_2!\, n_3!\, ...n_r!) \qquad (2.1.2)$$

2.2 Kombinationen

Aus n verschiedenen Elementen kann man ohne Berücksichtigung der Reihenfolge und ohne Rücklegung
k Stück ($1 \leq k \leq n$) auf

$$n! / [(n-k)!\, k!] \qquad (2.2.1)$$

verschiedene Arten auswählen., d.h.

$$\frac{\#\text{Permutationen}}{k!}$$

2.3 Kombinatorische Resultate

Stichproben
(n Kugeln aus einer Urne mit N Kugeln)

Verteilungen
(n Murmeln verteilt auf N Zellen)

Herzogin
(n Ringe auf N Finger angesteckt)

Eisenbahn
(n Wagen verteilt auf N Rangiergleisen)

Stichproben vom Umfang n aus N unterschiedlichen Kugeln

	mit Rücklegen	ohne Rücklegen
in Reihenfolge	(2.3.1)	(2.3.2)
ohne Reihenfolge	(2.3.3)	(2.3.4)

Verteilungen von n Murmeln auf N Zellen

	mit Mehrfachbesetzung	ohne Mehrfachbesetzung
unterscheidbare Murmeln	N^n	$N!/(N-n)!$
ununterscheidbare Murmeln	s.u.	$N!/[(N-n)!n!]$

Erklärung für (2.3.3)

Eine Stichprobe der Größe n wird aus N unterschiedlichen Kugeln mit Rücklegen gezogen (die Reihenfolge ist unwichtig).

oder

n identische Kugeln sollen auf N unteschiedliche Zellen verteilt werden.

Wieviele Möglichkeiten gibt es?

|000| |0| |00| |.......|0|

Die Anzahl der Anordnungen von n Kugeln (0) und (N-1) Striche (|), die internen Grenzen der N Zellen:

$$(N-1+n)!/[(N-1)!n!]$$

2.4 Kombinatorische Beispiele

2.4.1 Pokerspiel

5 Karten aus 52

Insgesamt gibt es

mögliche Blattkombinationen.

(a)
P(P-König, H-König, H3, Kr7, Ka2) =

(b)
P(P-König, H-König, ...) =

(einschließlich ein Blatt mit allen Königen)

(c)

P(mindestens 1 schwarzer K und 1 roter K)

{$\neq$ P(genau 1 schwarzer K und 1 roter K)}

= P(genau 1 sK, 1 rK) + P(1 sK, 2 rK)
+ P(2 sK, 1 rK) + P(2 sK, 2 rK)

= 1 – P(kein König) – P(genau 1sK) –
P(genau 1rK)

2.4.2 Runs

d Damen und h Herren sitzen in einer Reihe nebeneinander, z.B.

DHDDDDHHHHHHDHHD

Deutet diese Anordnung auf eine Tendenz hin, daß Nachbarn zum gleichen Geschlecht gehören? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit r D- und s H-runs anzutreffen?

Es gibt $(d+h)!/(d!h!)$ Anordnungen.
Es muß gelten $r-1 \leq s \leq r+1$.
Es gibt $(d-1)!/[(r-1)!(d-r)!]$ Möglichkeiten, die Längen der D-runs festzulegen
(d Murmeln über r Zellen, so dass keine Zelle leer bleibt)
und $(h-1)!/[(s-1)!(h-s)!]$ für die H-runs.
Im Fall $r = s$ muß man mit 2 multiplizieren.

2.5 W-Theorie und Kombinatorik

2.5.1 Prozedur

Raum der möglichen Ereignisse bestimmen:

— mit/ohne Rücklegen

— Unterscheidbarkeit
(von Objekten, Zellen....)

— Reihenfolgen

Sind alle Ereignisse gleichwahrscheinlich, dürfen wir kombinatorische Methoden anwenden.

Abzählen der Ereignisse insgesamt
Abzählen der „günstigen“ Ereignisse

2.5.2 Anwendung und Interpretation

In der Kombinatorik gibt es viele interessante (und manchmal trickreiche) Fragestellungen.

z.B.

(1) Auf wieviele Weisen können m Ehepaare um einen Tisch sitzen, so dass jede Frau zwischen zwei Männern sitzt und nicht neben Ihrem Mann?

(2) Zwei Kartenspiele werden getrennt gemischt. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Karte dieselbe Position in beiden Spielen besetzt?

Seitens der Wahrscheinlichkeitstheorie sind die Annahmen und die Interpretationen am wichtigsten.