

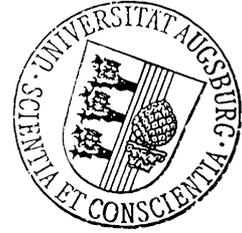
W-Theorie (Bis jetzt)

Einführung
— Beispiele

Was ist Wahrscheinlichkeit?
— Axiome und Interpretation
— Unabhängigkeit

Kombinatorik
— Permutationen und Kombinationen
— Stichproben (Urnen)
— Verteilungen (Zellen)
— Runs

Diskrete Zufallsvariablen
Erwartungswerte
Diskrete Verteilungen
— Hypergeometrische
— Geometrische
— Binomial
— Negativ-Binomial



3.9 Poisson Verteilung

3.9.1 Formeln

$$p_k = e^{-\lambda} \lambda^k / k! \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.9.1)$$

$$p_0 = e^{-\lambda}$$

$$P(X \geq k) = e^{-\lambda} \sum_{i \geq k} \lambda^i / i! = \Gamma_k(\lambda) \quad (*)$$

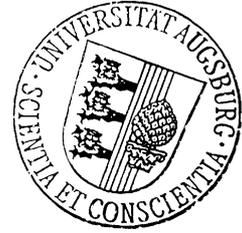
$$P(X = r \mid X \geq k) = p_r / \sum_{i \geq k} p_i$$

$$P(j \leq X \leq k) = \Gamma_j(\lambda) - \Gamma_{k+1}(\lambda)$$

$$E[X] = \lambda$$

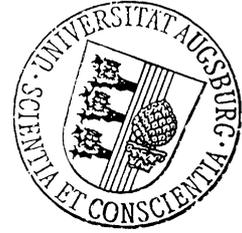
$$V[X] = \lambda$$

$$(*) \quad \Gamma_k(\lambda) = \int_0^\lambda e^{-t} t^{k-1} dt / (k-1)!$$



3.9.2 Anwendungen — Poisson Verteilung

- 1) # Unfälle —
z.B. Todesfälle nach Huftritten von
Pferden in der preußischen Armee
14 Korps 1875-1894 196 Todesfälle
Das Gesetz der kleinen Zahlen
L. von Bortkewitsch (Teubner 1898)
- 2) # Fehler — z.B. Tippfehler
- 3) Tore im Sport (?)
- 4) Bombenverteilung in London
(Feller s. 160)
- 5) # Anrufe



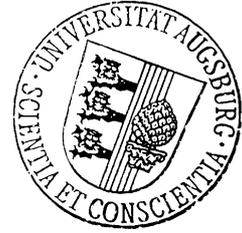
Beispiel 3.9.2 (4) Bomben in London (V1 und V2)

Das Gebiet von Süd-London wird in 576 kleinere Gebiete von je 0.25 km^2 aufgeteilt. Die Tabelle zeigt die Anzahl Gebiete N_k , in denen genau k Bomben gefallen sind.

k	N_k	Poisson($k; 0.9323$)
0	229	226.74
1	211	211.39
2	93	98.54
3	35	30.62
4	7	7.14
≥ 5	1	1.57

λ wird durch $537/576$ geschätzt.

Wie soll man dieses Resultat deuten?



Eine wichtige Begründung in vielen Anwendungen ist die folgende Eigenschaft der Poisson Verteilung:

Satz 3.9.2

X, Y Poissonverteilte ZV mit Parametern λ_1, λ_2

$$X \sim P(\lambda_1) \text{ und } Y \sim P(\lambda_2)$$

X, Y unabhängig $\Rightarrow X+Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$

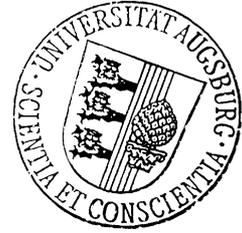
Beweis

Entweder über

(a) Faltung

oder

(b) Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktionen (später)



3.9.3 Die Poisson Verteilung als eine Approximation für die Binomialverteilung

$$X \sim B(N, p)$$

$$P(X=k) = \frac{N!}{[k!(N-k)!]} p^k (1-p)^{N-k}$$

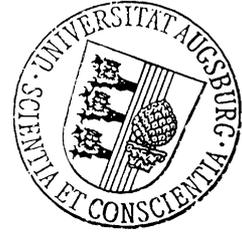
Sei $Np = \lambda$, dann ist $X \sim B(N, \lambda/N)$

$$\begin{aligned} P(X=k) &= {}^N C_k (\lambda/N)^k (1-\lambda/N)^N (1-\lambda/N)^{-k} \\ &= \end{aligned}$$

Für $N \rightarrow \infty$ und λ konstant, gilt

$$P(X=k) \rightarrow \lambda^k / k! e^{-\lambda}$$

eine Poisson Verteilung. Man findet auch „Für $N \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$ unter der Bedingung, daß $Np \rightarrow \lambda$, ist $P(Np)$ eine gute Approximation für $B(N, p)$.“



3.9.4 Die Poisson Verteilung ist die Zufallsverteilung

Sei $p_1(i) = P(i \text{ Ereignisse im Zeitintervall } t_1)$

$p_2(j) = P(j \text{ Ereignisse im Zeitintervall } t_2)$

wo $t_1 \cap t_2 = \emptyset$ und

$p_0(n) = P(n \text{ Ereignisse im } t_0 = t_1 \cup t_2)$

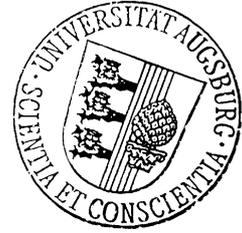
Dann $p_0(n) = \sum_{i=0}^n p_1(i) \cdot p_2(n-i)$

Wir möchten, daß die Verteilungen $\{p_k(i)\}$ alle dieselbe Form haben.

Wir nehmen an, daß die Ereignisse rein zufällig und unabhängig von einander sind.

=> Die Wahrscheinlichkeit ein Ereignis in t_1 fällt, gegeben, daß es in $t_0 = t_1 \cup t_2$ fällt, ist

$$\alpha = t_1 / t_0$$



Dann gilt

$$p_1(i) \cdot p_2(n-i) = {}^n C_i \alpha^i (1-\alpha)^{(n-i)} p_0(n)$$

Insbesondere haben wir

$$p_1(n) \cdot p_2(0) = \alpha^n p_0(n) \quad (=> p_2(0) > 0)$$

und

$$p_1(n-1) \cdot p_2(1) = n \alpha^{n-1} (1-\alpha) p_0(n)$$

$$p_1(n) / p_1(n-1) = [p_2(1) / p_2(0)] [\alpha / (1-\alpha)] / n$$

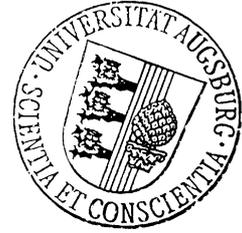
Für $n = 1$

$$[p_1(1) / p_1(0)] / \alpha = [p_2(1) / p_2(0)] / (1-\alpha) = c$$

$$\Rightarrow p_1(n) / p_1(n-1) = \alpha c / n$$

$$p_1(n) = (\alpha c)^n / n! p_1(0)$$

eine Poisson Verteilung mit $\lambda = \alpha c$



3.9.5 Noch zwei Poisson Beispiele

(a) Geburtstage

Gegeben 60 Studenten, wieviele haben heute Geburtstag?

Als Approximation nehmen wir:

$$X \sim P(60/365)$$

$$P(\text{mindestens 1 Geburtstag}) \approx 1 - 0.8484$$

(b) Lotto

Wieviele Gewinner im Lotto?

$$P(\text{Größter Gewinn}) = (1 / {}^{49}C_6) * 0.1$$

Gegeben $N=100,000,000$ Tipps, die alle zufällig ausgewählt werden, modellieren wir # Gewinner mit

$$X \sim P(0.715112)$$

X	0	1	2	≥ 3
P(X)	0.489	0.350	0.125	0.036