W-Theorie
(Bis jetzt)

Einführung
— Beispiele

Was ist Wahrscheinlichkeit?
— Axiome und Interpretation
— Unabhängigkeit

Kombinatorik
— Permutationen und Kombinationen
— Stichproben (Urnen)
— Verteilungen (Zellen)
— Runs

Diskrete Zufallsvariablen
Erwartungswerte
Diskrete Verteilungen
— Hypergeometrische
— Geometrische
— Binomial
— Negativ-Binomial

3.9 Poisson Verteilung

3.9.1 Formeln

$$p_k = e^{-\lambda}\, \lambda^k / k! \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (3.9.1)$$

$$p_0 = e^{-\lambda}$$

$$P(X \geq k) = e^{-\lambda} \sum_{i\geq k} \lambda^k / k! = \Gamma_k(\lambda) \qquad (*)$$

$$P(X = r \mid X \geq k) = p_r \,/ \sum_{i\geq k} p_i$$

$$P(j \leq X \leq k) = \Gamma_j(\lambda) - \Gamma_{k+1}(\lambda)$$

$$E[\, X \,] = \lambda$$

$$V[\, X \,] = \lambda$$

(*) $\Gamma_k(\lambda) = \int_0^{\lambda} e^{-t}\, t^{k-1} dt / (k-1)!$

3.9.2 Anwendungen — Poisson Verteilung

1) # Unfälle —
z.B. Todesfälle nach Huftritten von Pferden in der preußischen Armee
14 Korps 1875-1894 196 Todesfälle
Das Gesetz der kleinen Zahlen
L. von Bortkewitsch (Teubner 1898)

2) # Fehler — z.B. Tippfehler

3) Tore im Sport (?)

4) Bombenverteilung in London
(Feller s. 160)

5) # Anrufe

Beispiel 3.9.2 (4)
Bomben in London (V1 und V2)

Das Gebiet von Süd-London wird in 576 kleinere Gebiete von je 0.25 km^2 aufgeteilt. Die Tabelle zeigt die Anzahl Gebiete N_k, in denen genau k Bomben gefallen sind.

k	$\mathbf{N_k}$	**Poisson(k; 0.9323)**
0	229	226.74
1	211	211.39
2	93	98.54
3	35	30.62
4	7	7.14
≥5	1	1.57

λ wird durch 537/576 geschätzt.

Wie soll man dieses Resultat deuten?

Eine wichtige Begründung in vielen Anwendungen ist die folgende Eigenschaft der Poisson Verteilung:

Satz 3.9.2

X, Y Poissonverteilte ZV mit Parametern λ_1,λ_2

$$X \sim P(\lambda_1) \text{ und } Y \sim P(\lambda_2)$$

X, Y unabhängig $\Rightarrow X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

Beweis

Entweder über

(a) Faltung

oder

(b) Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktionen (später)

3.9.3 Die Poisson Verteilung als eine Approximation für die Binomialverteilung

$X \sim B(N,p)$

$P(X=k) = N!/[k!(N-k)!]\ p^k\ (1-p)^{N-k}$

Sei $Np = \lambda$, dann ist $X \sim B(N, \lambda/N)$

$P(X=k) = {}^{N}C_k\ (\lambda/N)^k\ (1-\lambda/N)^N (1-\lambda/N)^{-k}$

$=$

Für $N \to \infty$ und λ konstant, gilt

$$P(X=k) \to \lambda^k/k!\ e^{-\lambda}$$

eine Poisson Verteilung. Man findet auch „Für $N \to \infty$, $p \to 0$ unter der Bedingung, daß $Np \to \lambda$, ist $P(Np)$ eine gute Approximation für $B(N,p)$."

3.9.4 Die Poisson Verteilung ist die Zufallsverteilung

Sei $p_1(i) = P(i$ Ereignisse im Zeitintervall $t_1)$

$p_2(j) = P(j$ Ereignisse im Zeitintervall $t_2)$

wo $t_1 \cap t_2 = \emptyset$ und

$p_0(n) = P(n$ Ereignisse im $t_0 = t_1 \cup t_2)$

Dann $p_0(n) = \sum_{i=0}^{n} p_1(i)^* \, p_2(n-i)$

Wir möchten, daß die Verteilungen $\{p_k(i)\}$ alle dieselbe Form haben.

Wir nehmen an, daß die Ereignisse rein zufällig und unabhängig von einander sind.

=> Die Wahrscheinlichkeit ein Ereignis in t_1 fällt, gegeben, daß es in $t_0 = t_1 \cup t_2$ fällt, ist

$$\alpha = t_1 / t_0$$

Dann gilt

$$p_1(i)^* \, p_2(n-i) = {}^nC_i \alpha^i (1-\alpha)^{(n-i)} \, p_0(n)$$

Insbesondere haben wir

$$p_1(n)^* \, p_2(0) = \alpha^n \, p_0(n) \quad (\Rightarrow p_2(0) > 0)$$

und

$$p_1(n-1)^* \, p_2(1) = n\alpha^{n-1}(1-\alpha) p_0(n)$$

$$p_1(n)/p_1(n-1) = [p_2(1)/p_2(0)]\,[\alpha/(1-\alpha)]/n$$

Für $n = 1$

$$[p_1(1)/p_1(0)]/\alpha = [p_2(1)/p_2(0)]/(1-\alpha) = c$$

$$\Rightarrow p_1(n)/p_1(n-1) = \alpha c/n$$

$$p_1(n) = (\alpha c)^n/n! \; p_1(0)$$

eine Poisson Verteilung mit $\lambda = \alpha c$

3.9.5 Noch zwei Poisson Beispiele

(a) Geburtstage
Gegeben 60 Studenten, wieviele haben heute Geburtstag?
Als Approximation nehmen wir:

$X \sim P(60/365)$

P(mindestens 1 Geburtstag) $\approx 1 - 0.8484$

(b) Lotto
Wieviele Gewinner im Lotto?

P(Größter Gewinn) = $(1/{}^{49}C_6)$*0.1
Gegeben N=100,000,000 Tipps, die alle zufällig ausgewählt werden, modellieren wir # Gewinner mit

$X \sim P(0.715112)$

X	0	1	2	≥ 3
P(X)	0.489	0.350	0.125	0.036