5.8 Verzweigungsprozesse

Die Wahrscheinlichkeit des Aussterbens einer Linie.

Eine Person hat k Kinder mit Wahrscheinlichkeit p_k. Die WEF ist

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$$

Sei Z_n die Anzahl der Nachkommen in der n. Generation und $Z_0 = 1$. Die WEF für Z_n ist

$$\begin{aligned}
g_n(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(Z_n = k) \qquad n \geq 1 \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} P(Z_{n-1} = r) \sum_{k=0}^{\infty} z^k P\left(\sum_{i=0}^{r} X_i = k\right) \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} P(Z_{n-1} = r) g(z)^r \\
&= g_{n-1}(g(z)) \qquad (1)
\end{aligned}$$

und es ist weiterhin klar, dass

$$\begin{aligned}
g_1(z) &= g(z) \\
g_2(z) &= g(g(z)) \\
g_n(z) &= g(g_{n-1}(z))
\end{aligned}$$

5.8.1 Momente von Z_n

$$g_n'(z) = g'(g_{n-1}(z))g_{n-1}'(z)$$

$$E[Z_n] = g_n'(1) = g'(g_{n-1}(1))g_{n-1}'(1) = \mu E[Z_{n-1}]$$

$$E[Z_n] = \mu^n$$

$$Var[Z_n] = \begin{cases} n\sigma^2 & \mu = 1 \\ \frac{\sigma^2(\mu^n - 1)\mu^{n-1}}{\mu - 1} & \mu \neq 1 \end{cases}$$

wo

$$E[Z_1] = \mu$$

$$V[Z_1] = \sigma^2$$

5.8.2 Aussterbewahrscheinlichkeit

Sei $q_n = P(Z_n = 0)$ die Wahrscheinlichkeit, dass es in der n. Generation keine Kinder gibt.

$$q_{n+1} \geq q_n$$

$$q = \lim_{n \to \infty} q_n$$

ist die Aussterbewahrscheinlichkeit.

$$\begin{aligned} q_n &= g_n(0) \\ &= g(g_{n-1}(0)) \\ q &= \lim g(g_{n-1}(0)) \\ &= g(\lim g_{n-1}(0)) \\ &= g(q) \qquad (1) \end{aligned}$$

NB g ist eine stetige Funktion.

5.8.3 Die Gleichung $g(z) = z$

$$g(0) = p_0 > 0$$

(Sonst kann die Linie nie aussterben)

$$g(z) > 0 \quad \text{in} \quad [0,1]$$

$$g(1) = 1$$

Da $g'(z) > 0$ in $[0,1]$, haben wir zwei mögliche Fälle:

$$\text{(a)} \quad g'(1) \leq 1 \quad \text{und} \quad q = 1$$

$$\text{(b)} \quad g'(1) > 1 \quad \text{und} \quad q \quad \text{ist die kleinste Lösung} > 0$$

$$\text{NB} \quad g'(1) = E[X]$$

Im Fall (b) sei $\eta = g(\eta)$ und $\eta < 1$

$$q_1 = g(0) \leq \eta$$

$$\Rightarrow g(q_1) \leq g(\eta) = \eta$$

$$\Rightarrow q_2 = g(q_1) \leq \eta$$

und folgendermassen $q_n \leq \eta$ so dass $\eta = q$

5.8.4 Verzweigungsprozesse —Beispiele

1) Poisson Verteilung

$$g(z) = e^{-\mu(1-z)}$$

$$g(z) = z \Rightarrow \mu = -\frac{1}{(1-z)} \log z = h(z)$$

$$q = 1 \quad 0 \le \mu \le 1$$

$$q = h^{-1}(\mu) \quad 1 < \mu$$

2) Geometrische Verteilung

$$g(z) = \frac{p}{(1-qz)}$$

$$g(z) = z \Rightarrow qz^2 - z + p = 0$$

$$E[X] = \mu = \frac{q}{p} \Rightarrow \mu z^2 - (1+\mu)z + 1 = 0$$

$$q = 1 \quad 0 \le \mu \le 1$$

$$q = \frac{(1+\mu) + \sqrt{(1+\mu)^2 - 4\mu}}{2\mu} = \frac{1}{\mu} \quad 1 < \mu$$