K7 Wahrscheinlichkeitsmaße mit Dichten

7.1 Ereignisräume

Ein endlicher Raum ohne Reihenfolge:

$$(rot, schwarz, blau)$$

Ein endlicher geordneter Raum:

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

Ein abzählbarer Raum:

$$(0, 1, \ldots)$$

Ein nichtabzählbarer Raum:

$$[0, \infty) \text{ oder } [0, 1] \text{ oder } (-\infty, \infty)$$

Bis jetzt haben wir höchstens abzählbare Ereignisräume betrachtet. Diskrete Zufallsvariablen können wir als Abbildungen auf $\mathbb{N}_0$ betrachten. Bei unendlichen nicht-abzählbaren Räumen Ω werden wir darauf verzichten, $P(A)$ für alle $A \in \Omega$ zu definieren. Wir wollen mit kontinuierlichen Zufallsvariablen arbeiten können, die auf $(-\infty, \infty)$ definiert sind.

z.B. Länge einer Krankheit, Betriebsergebnisse, Meßfehler, Wartezeiten, Schadenssummen, Wasserverbrauch, ...

7.2 $\sigma-$Algebren

Def 7.2.1 Sei $\Omega \neq \emptyset$ beliebig. Eine Familie von Teilmengen von Ω, $\mathcal{A}$, heißt σ-Algebra, wenn gilt:

$$\Omega \in \mathcal{A}$$

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$$

$$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

Dann folgt $\emptyset \in \mathcal{A}$ und $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$

Lemma 7.2.2
Sei $I \neq \emptyset$ eine beliebige Indexmenge und sei für alle $i \in I$, A_i eine σ-Algebra in Ω. Dann ist das System

$$\mathcal{A}_I = \bigcap_{i=I} A_i$$

aller Mengen $A \in \Omega$, die für alle i zu $\mathcal{A}_i$ gehören eine σ-Algebra.
Beweis: (1) $\Omega \in \mathcal{A}_i \Rightarrow \Omega \in \mathcal{A}_I$

$$(2) A \in \mathcal{A}_I \Rightarrow \forall i \quad A \in \mathcal{A}_i \text{ und } A^c \in \mathcal{A}_i \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}_I$$

(3) wie (2)

Satz 7.2.3

Sei $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathcal{F}$ eine beliebige Familie von Teilmengen von Ω. Dann gibt es unter den σ-Algebras, die $\mathcal{F}$ enthalten, eine kleinste $\mathcal{A}(\mathcal{F})$, die Familie aller Mengen A die zu jeder σ-Algebra in Ω gehören, welche $\mathcal{F}$ enthält.

Beweis
Es gibt mindestens eine σ-Algebra, die $\mathcal{F}$ enthält, die Familie aller Teilmengen von Ω. Ist $\{\mathcal{A}_i : i \in I\}$ eine beliebige Indizierung der σ-Algebras, die $\mathcal{F}$ enthalten, so ist $I \neq \emptyset$ und $\mathcal{A}(\mathcal{F}) = \mathcal{A}_I$.

Beispiel:

$$\Omega = \mathbb{R}^n$$

und $\mathcal{F}$ die Familie aller nach links halboffenen Intervalle

$$(a, b] = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i \leq b_i, i = 1, ..n\}$$

$$\mathcal{B} := \mathcal{A}(\mathcal{F})$$

ist die Borelsche σ-Algebra in $\mathbb{R}^n$

7.3 Wahrscheinlichkeitsräume

Def 7.3.1

Ein meßbarer Raum ist ein Paar $(\Omega, \mathcal{A})$ bestehend aus einer nichtleeren Menge Ω und einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ von Teilmengen von Ω. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß P ist eine auf $\mathcal{A}$ definierte Funktion mit Werten in $[0, 1]$ welche den folgenden Bedingungen genügt:

$$P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

$$P(\Omega) = 1$$

P ist σ-additv, d.h. für disjunkte $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ gilt

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt Wahrscheinlichkeitsraum.

7.4 Verteilungsfunktionen und Dichten

7.4.1 Definitionen

Eine Funktion F auf $\mathbb{R}$ mit Werten in $[0, 1]$ heißt Verteilungsfunktion, wenn sie rechtsstetig und monoton wachsend ist (nicht notwendig strikt monoton) und wenn für

$$x \to -\infty \quad F(x) \to 0$$

$$x \to \infty \quad F(x) \to 1$$

gilt.

Ist P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ und setzt man $F(x) = P((-\infty, x])$, so ist F eine Verteilungsfunktion. Umgekehrt

$$P((a, b]) = F(b) - F(a)$$

Eine Dichte auf $\mathbb{R}$ ist eine nichtnegative Funktion mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$$

Das Integral muß wohldefiniert sein: f muß stetig bis auf höchstens endlich viele Sprungstellen sein.

Ist f eine Dichte, dann ist

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

eine Verteilungsfunktion. Die Wahrscheinlichkeit von Intervallen is durch

$$P((a,b]) = \int_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t$$

gegeben.

Ist F eine beliebige stetige Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}$, die auf dem Komplement einer endlichen oder leeren Menge C stetig differenzierbar ist, so wird durch

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) \quad x \in \mathbb{R}\backslash C$$

eine Dichte f zu F definiert.

Ist (a_n) eine wachsende Folge mit $a_n < b$, die gegen b strebt, so ist $\{b\}$ der Durchschnitt der $(a_n, b]$ und die über diese Intervalle erstreckten Integrale streben gegen 0.

$$\Rightarrow P(\{b\}) = 0 \quad \forall b$$

Kein Ergebnis $b \in \mathbb{R}$ hat positive Wahrscheinlichkeit.

7.4.2 Beispiele von Dichten

- Die Gleichverteilung (z.B. Zufallszahlen)

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad a \leq x \leq b$$

  Insbesondere

$$f(x) = 1 \quad 0 \leq x \leq 1$$

- Die Exponentialverteilung (z.B. Zeit zum Ereignis)

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda e^{-\lambda x} \quad && x \geq 0 \\ &= 0 && x \leq 0 \end{aligned}$$

- Die Normalverteilung (z.B. Meßfehler)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty$$

7.4.3 Eigenschaften der Exponentialverteilung

Sei $X \sim P(\lambda t)$ d.h. λ ist die erwartete Anzahl Ereignisse pro Zeiteinheit. Sei T eine Zufallsvariable, die Zeit zum nächsten Ereignis.

$$P(T > t) = P(X = 0 \quad \text{in} \quad t)$$

$$1 - F(t) = e^{-\lambda t}$$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

T hat eine Exponentialverteilung, $T \sim E(\lambda)$

Für eine Exponentialverteilung gilt, $b > a$,

$$P(T > b | T > a) = P(T > b - a)$$

weil

$$\frac{\int\limits_b^\infty \lambda e^{-\lambda t} \mathrm{d}t}{\int\limits_a^\infty \lambda e^{-\lambda t} \mathrm{d}t} = e^{-\lambda(b-a)}$$

"Gedächtnislosigkeit"

7.4.4 Eine wichtige Eigenschaft der Normalverteilung

Sei X_1 und X_2 unabhängig normalverteilt mit Erwartungswerten und Varianzen (μ_i, σ_i^2)

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \quad X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

dann gilt

$$W = X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

und

$$V = X_1 - X_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Beweis durch Faltung oder Charakteristische Funktionen (beide werden später behandelt).

Die wichtigste Eigenschaft der Normalverteilung ergibt sich aus dem Zentralen Grenzwertsatz.

7.4.5 Stetige Verteilungen in R

Wie mit den diskreten Verteilungen werden die vier Standardbefehle verwendet:

d Dichte $f_X(x)$ der Zufallsvariable X
(keine Wahrscheinlichkeit)

p Verteilungsfunktion, $F_X(x) = P(X \leq x)$

q Quantile der Verteilung
$F_X(q) = p$ oder $P(X \leq q) = p$

r eine zufällige Stichprobe aus der Verteilung

Beispiele

```
dunif(3,0,2)
pexp(5,1/3)
qnorm(0.975)
xx <- rnorm(100,10,5); hist(xx)
zz <- runif(10000); hist(zz)
```