7.5 Dichten in $\mathbb{R}^n$

Eine Dichte in $\mathbb{R}^n$ ist eine nichtnegative integrierbare funktion f auf $\mathbb{R}^n$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = 1$$

Die Integrale sollen wohldefiniert sein (z.B. f stetig). Für $a = (a_1, \ldots, a_n)$ und $b = (b_1, \ldots, b_n)$ gilt

$$P((a, b]) = \int_{(a,b]} f \mathrm{d}x$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

7.6 Meßbare Funktionen

Definition 7.6.1

Sind $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ meßbare Räume, so nennen wir eine Abbildung h von Ω in Ω' meßbar, wenn für alle $A' \in \mathcal{A}'$

$$h^{-1}(A') \in \mathcal{A}$$

Eine Zufallsvariable ist eine auf dem Stichprobenraum Ω eines W-raums definierte meßbare Funktion.

Lemma 7.6.2

Ist h eine Abbildung von Ω in Ω' und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in Ω, so ist die Familie

$$\mathcal{A}'_h := \{A' \subset \Omega' : h^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra in Ω'

Beweis:

Die Mengenabbildung h^{-1} ist mit allen mengentheoretischen Operationen vertauschbar.

z.B. gilt

$$h^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} h^{-1}(A'_i)$$

Für Mengen $A'_i \in \mathcal{A}'_h$ gehört $h^{-1}(A'_i)$ zu $\mathcal{A}$ und daher auch deren Vereinigung. Wegen der Gleichung gehört dann die Vereinigung der A'_i zu $\mathcal{A}'_h$.

Lemma 7.6.3
Ist $X : \Omega \to \Omega'$ meßbar und $g : \Omega' \to \Omega''$ meßbar (bzgl.: $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}''$) so ist

$$Y = g \circ X \quad \text{meßbar}$$

Beweis: Für $B'' \in \mathcal{A}''$ ist

$$Y^{-1}(B'') = X^{-1}(g^{-1}(B'')) \in \mathcal{A}$$

Lemma 7.6.4
Sind $X_1, \ldots X_n$ reellwertige meßbare Funktionen auf Ω, so ist durch

$$X(\omega) = (X_1(\omega), \ldots X_n(\omega))$$

eine $\mathbb{R}^n$-wertige meßbare Funktion definiert und umgekehrt.

Beweis:
Für $a = (a_1, \ldots, a_n)$ und $b = (b_1, \ldots, b_n)$ ist

$$X^{-1}((a, b]) = \bigcap_{i=1}^{n} X_i^{-1}((a_i, b_i])$$

Die Umkehrung folgt aus

$$X_i^{-1}((a_i, b_i]) = X^{-1}(D_i)$$

mit $D_i = \{(x_1, \ldots, x_n); a_i < x_i \leq b_i\}$

Satz 7.6.5

Sind $X_1, \ldots, X_i, \ldots$ reellwertige meßbare Funktionen und $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \in \mathbb{R}$ so sind auch die Funktionen

$$\alpha_1 X_1 + \ldots \alpha_n X_n$$

$$X_1 X_2 X_3 \ldots X_n$$

$$\sup\{X_i, i \geq 1\}$$

$$\inf\{X_i, i \geq 1\}$$

$$\lim \sup X_i$$

$$\lim \inf X_i$$

meßbar mit Wertebereich $\mathbb{R}$

Beweis:
Setzt man $X = (X_1, \ldots)$ und $g(x_1, \ldots) = \sum \alpha_i x_i$ so ist $\sum \alpha_i X_i = g \circ X$. Aus g stetig folgt die Meßbarkeit.
Ebenso folgt die Meßbarkeit des Produkts.

$$\sup X_i \leq x = \bigcap_i \{X_i \leq x\}$$

$$\inf X_i < x = \bigcup_i \{X_i < x\}$$

(Aus diesen zwei Gleichungen folgt die Meßbarkeit.)

Schließlich

$$\lim\sup X_i = \inf_k (\sup_{i \geq k} X_i)$$

7.7 Unabhängigkeit

Satz 7.7.1
(i) Sind $X_1, \ldots X_n$ unabhängige Zufallsvariablen und hat X_i die Dichte f_i so hat

$$X{=}(X_1, \ldots, X_n)$$

die Dichte f mit

$$f(x_1 \ldots, x_n) = \prod f_i(x_i)$$

(ii) Hat X die Dichte f, so sind die X_i unabhängig mit Dichten f_i.

Beweis (i):
Sei Q das W-maß mit Dichte f in $\mathbb{R}^n$. Für $a \leq b \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$Q((a,b]) = \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} f_i(x_i) \mathrm{d}x_i = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in (a_i, b_i])$$

$$= P_X(X \in (a,b]) \Rightarrow Q = P_X$$

Beweis (ii):

$$P_X(X \in (a,b]) = \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} f_i(x_i)\mathrm{d}x_i$$

Man setzt bei beliebigen festen j für alle $i \neq j$
$a_i = -\infty \quad b_i = \infty$. So folgt, dass P_{X_j} die Dichte f_j hat.
Läßt man wieder beliebige reelle $a_i \leq b_i$ zu, so folgt die Unabhängigkeit.

7.8 Erwartungswerte

Satz 7.8.1
Sei X eine reellwertige Zufallsvariable, deren Verteilung P_X ein bis auf endlich viele Sprungstellen stetige Dichte f hat und sei g stetig auf $\mathbb{R}$. Dann existiert $E[g(X)]$ genau dann wenn

$$I := \int |g(x)| f(x) \mathrm{d}x$$

endlich ist und in diesem Fall ist

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) \mathrm{d}x$$

Beweis:
Zu jedem $\delta > 0$ existiert eine strikt monoton wachsende Folge $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ mit

$$x_n \to -\infty \quad \text{für} \quad n \to -\infty$$

$$x_n \to \infty \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

und mit

$$|g(x) - g(x_n)| < \delta \quad \text{für} \quad x_n \leq x \leq x_{n+1}$$

Sei $g_\delta(x) = g(x_n)$ für $x_n \leq x \leq x_{n+1}$, dann ist

$$|g_\delta(x) - g(x)| < \delta$$

und

$$E[g_\delta(X)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(x_n) \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x$$

Da I endlich ist, konvergiert die Summe und unterscheidet sich von

$$\int g(x) f(x)\mathrm{d}x$$

maximal um δ. Deswegen ist

$$|E[g(X)] - E[g_\delta(X)]| \leq \delta$$

7.8.1 Beispiel

$$P(X = x) = \frac{a}{x^2} \quad x = 1, 2 \ldots$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{a}{x^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{6}{\pi^2}$$

$$E[X] = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad \infty$$

$$P(Y = y) = \frac{b}{y^2} \quad y = \pm 1, \pm 2 \ldots$$

$$\sum_{y=-\infty, y \neq 0}^{\infty} \frac{b}{y^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{3}{\pi^2}$$

$$E[|Y|] = E[Y^+] - E[Y^-]$$

Beide divergieren $\Rightarrow E[Y]$ existiert nicht.

7.8.2 Eigenschaften von Erwartungswerten

(wie schon für den diskreten Fall im §3.2)

- für alle $a, b \in \mathbb{R}$

$$E[a + bX] = a + bE[X]$$

- ob X und Y unabhängig sind oder nicht

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

- im allgemeinen gilt

$$E[g(X)] \neq g(E[X])$$

- für X und Y unabhängig gilt

$$E[XY] = E[X] * E[Y]$$

  aber sonst nicht.