10 Momente und Charakteristische Funktionen

$E[X^k]$ ist das k.Moment einer Verteilung.
$E[(X-E[X])^k]$ ist das k. zentrierte Moment.

z.B. (1) $\quad X \sim U(0,1)$

$$\begin{aligned} E[X^k] &= \int_0^1 x^k \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{k+1} \\ E[(X-E[X])^k] &= \int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)^k \mathrm{d}x \\ &= 0 \qquad\qquad k=2m+1 \\ &= \frac{(1/2)^k}{k+1} \qquad k=2m \end{aligned}$$

(2) $\quad X \sim N(0,1)$

$$\begin{aligned} E[X^k] &= 0 \qquad\qquad k=2m+1 \\ &= (k-1)(k-3).....1 \qquad k=2m \end{aligned}$$

10.1 Momenterzeugende Funktionen

Für diskrete Zufallsvariablen kann man eine Verteilung durch die WEF zusammenfassen. Für stetige ZV hat man an die MEF dafür gedacht:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] \qquad (1)$$

Für X stetig mit Dichte f ist die MEF mit einer Laplace Transformation verwandt da

$$M(t) = \int e^{tx} f(x) \mathrm{d}x$$

Falls $M(t) < \infty$ in einem offenen Intervall um 0, gilt nach Taylor

$$M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E[X^k]}{k!} t^k \qquad (2)$$

Beispiele: (1) $X \sim U(0,1) \Rightarrow E[e^{tX}] = \frac{1}{t}(e^t - 1)$
und (2) $X \sim E[\lambda] \Rightarrow E[e^{tX}] = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1} \quad (t < \lambda)$

Es gibt zwei Probleme mit diesen Funktionen:
(a) Das bestimmende Integral ist nicht immer endlich.
(b) Verteilungen werden nicht eindeutig durch Momente definiert.

10.1.1 Lognormal Gegenbeispiel

Sei X lognormalverteilt. Dann ist $Y = \log_e X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Für $Y \sim N(0, 1)$ hat X die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\log x)^2} \qquad x > 0$$

Betrachten wir die Funktion

$$f_a(x) = f(x)(1 + a \sin(2\pi \log x)) \quad -1 \le a \le 1$$

Wir zeigen, dass f_a eine Dichte ist, die dieselben Momente als f hat. Da $f_a(x) \ge 0$ genügt es zu zeigen, dass

$$D = \int_0^\infty x^k f(x) \sin(2\pi \log x) \mathrm{d}x = 0 \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Nach der Transformation $t = \log_e x$ haben wir

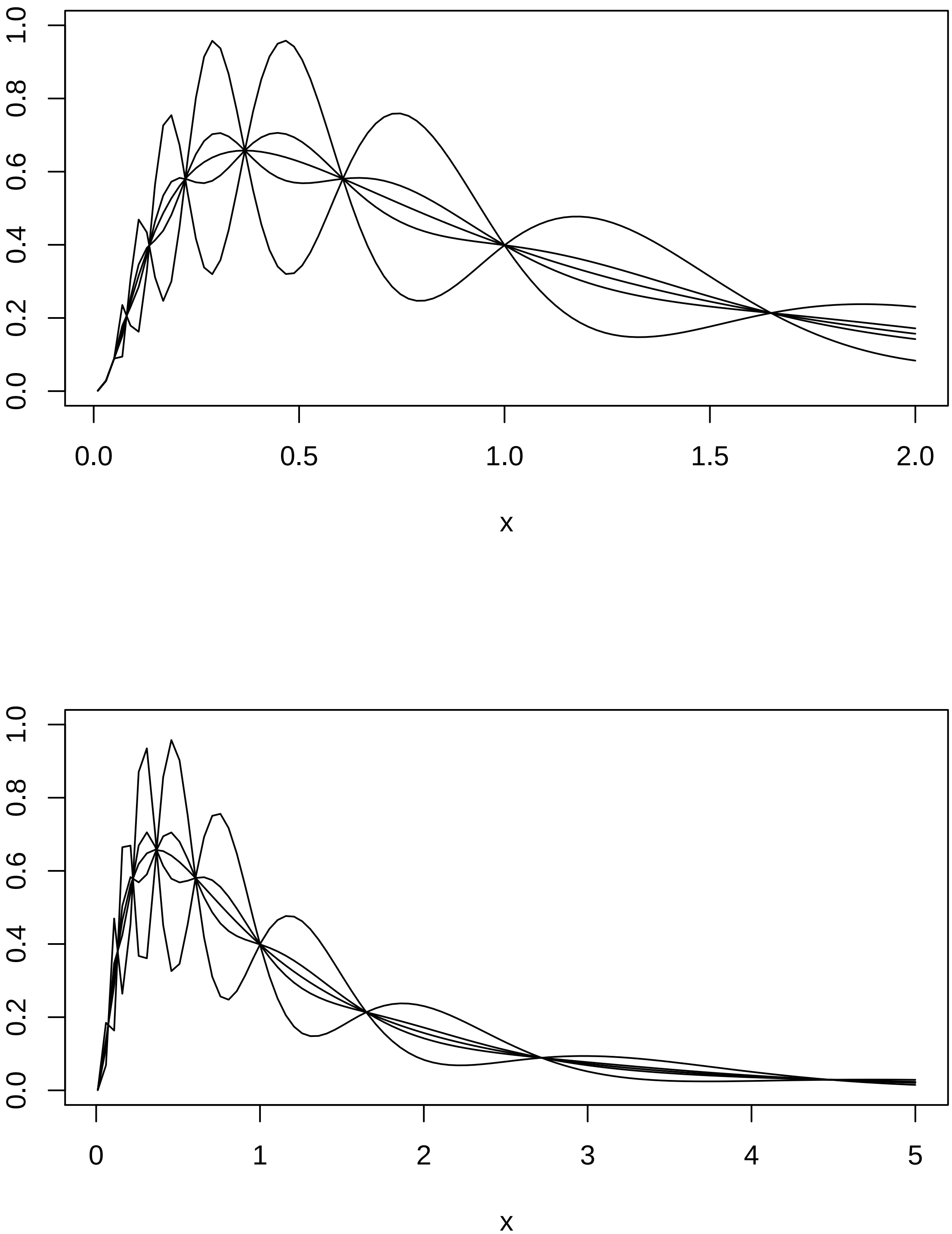
$$D = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2 + kt} \sin 2\pi t \mathrm{d}t$$

Nach der weiteren Transformation $y = t - k$ erhalten wir

$$D = e^{-\frac{1}{2}k^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} \sin 2\pi y \mathrm{d}y = 0$$

weil die Funktion ungerade ist.

Lognormalvariante: Dichten mit gleicher MGF (a=−0.5,−0.1,0,0.1,0.5)



10.2 Charakteristische Funktionen

$$\zeta_X(t) = E[e^{itX}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} E[X^k]$$

ist die Charakteristische Funktion der ZV X.

1. $\zeta_X(t)$ existiert $\forall t \in \mathbb{R}$

2. $\zeta_X(t)$ ist die Fouriertransformation der Dichte

3. Die Beziehung zwischen F_X und $\zeta_X(t)$ ist umkehrbar eindeutig.

z.B. $X_i \sim U(0,1) \quad i = 1, \ldots n$ u.i.v.
Die C.F. von X_i ist $\frac{1}{it}(e^{it} - 1)$
und die C.F. von der Summe $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ist

$$\left(\frac{1}{it}\right)^n (e^{it} - 1)^n$$

10.2.1 Resultate für Charakteristische Funktionen

- Für unabhängige $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ist die charakteristische Funktion der Summe

  $$S = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

  das Produkt der einzelnen c.f.'s

  $$\zeta_S(t) = E\left[e^{it\sum X_j}\right] = \prod_{j=1}^{n} E\left[e^{itX_j}\right] = \prod_{j=1}^{n} \zeta_{X_j}(t)$$

- Sei X eine reellwertige ZV mit c.f. $\zeta_X(t)$ und sei $E[X^k] < \infty$ für $k = 1, 2, \ldots$ dann folgt

  $$i^k E[X^k] = \zeta_X^(k)(0)$$

- Seien X, Y unabhängige ZV mit c.F. $\zeta_X(t), \zeta_Y(t)$

  $$a, b \in \mathbb{R} \quad Z = aX + b \Rightarrow \zeta_Z(t) = e^{itb}\zeta_X(t)$$

  $$\zeta_{X+Y}(t) = \zeta_X(t)\zeta_Y(t)$$

z.B.

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2), \quad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

und

$$S = X + Y$$

$$\zeta_X(t) = e^{i\mu_X t - \frac{1}{2}\sigma_X^2 t^2}$$

$$\zeta_{X+Y}(t) = e^{i(\mu_X + \mu_Y)t - \frac{1}{2}(\sigma_X^2 + \sigma_X^2)t^2}$$

$$\Rightarrow S \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_X^2)$$

wegen der Eindeutigkeit der c.F.

- Sei X eine reellwertige ZV mit Dichte f und sei g eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$ mit $Y = g(X)$ dann

  $$\zeta_Y(t) = E_Y[e^{itY}] = E_X[e^{itg(X)}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itg(x)} f(x) \mathrm{d}x$$

- Sei f die Dichte von der ZV X, dann ist

  $$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \zeta_X(t) \mathrm{d}t$$

  $\forall x$ wo f differenzierbar ist.

K 11 Ungleichungen

11.1 Markov Ungleichung

Sei X eine stetige ZV mit Dichte $f(x)$ und sei $g(x)$ eine auf $(0, \infty]$ monoton steigende nichtnegative Funktion mit $g(a) > 0$ dann gilt

$$P(X \geq a) \leq \frac{E[g(X)]}{g(a)} \tag{1}$$

Beweis:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) \mathrm{d}x$$

$$\geq \int_{a}^{\infty} g(x) f(x) \mathrm{d}x$$

$$\geq g(a) \int_{a}^{\infty} f(x) \mathrm{d}x$$

$$= g(a) P(X \geq a)$$

Dieses Resultat gilt für <u>alle</u> $f(x)$

11.2 Tschebychew Ungleichung

Sei X eine stetige ZV mit endlicher Varianz, für $\epsilon > 0$

$$P(|X - E[X]| > \epsilon) \leq \frac{V[X]}{\epsilon^2} \tag{2}$$

Beweis:

Für $Y = (|X - E[X]|$ und $g(Y) = Y^2$ gilt nach Markov

$$P(Y \geq \epsilon) \leq \frac{E[Y^2]}{\epsilon^2}$$

$$\text{d.h.} \qquad P(|X - E[X]| \geq \epsilon) \leq \frac{V[X]}{\epsilon^2}$$

Alternative Beweis für alle reellwertige ZV mit endlicher Varianz. Setzen wir $Z = (X - E[X])$, dann ist $E[Z] = 0$ und $V[Z] = V[X]$. Definieren wir weiter

$$W = 0 \quad \text{für } |Z| < \epsilon \quad \text{und} \quad W = \epsilon^2 \quad \text{für } |Z| \geq \epsilon$$

$$\Rightarrow W \leq |Z|^2$$

$$V[X] = V[Z] = E[|Z|^2] \geq E[W]$$

$$= 0 * P(|Z| < \epsilon) + \epsilon^2 * P(|Z| \geq \epsilon)$$

$$\Rightarrow P(|Z| \geq \epsilon) = P(|X - E[X]| \geq \epsilon) \leq \frac{V[X]}{\epsilon^2}$$

11.3 Tschebychew: Bemerkungen

- Tschebychew kann keine gute Annäherung sein, da sie für alle ZV gilt. Sie ist aber in der Theorie wichtig.

- Für $\epsilon < \sigma_X$ ist Tschebychew wertlos.

- Die Markov Ungleichung kann auf ähnlicher Weise in einer allgemeineren Form bewiesen werden.

- Für unimodale Dichten gilt das Resultat

$$P(|X - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{4\sigma^2}{9\epsilon^2} \qquad \forall \epsilon \geq \sqrt{\frac{8}{3}}\sigma$$

$$\leq \frac{4\sigma^2}{3\epsilon^2} - \frac{1}{3} \qquad \forall \epsilon \leq \sqrt{\frac{8}{3}}\sigma$$

  So dass für $\epsilon = 3\sigma$ hat man

$$P(|X - \mu| \geq 3\sigma) \leq \frac{4}{81} < 0.05$$

  (cf. Pukelsheim American Statistician 1994 s88-91)

11.4 Tschebychew: Beispiele

Beispiel (1)

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\text{nach Tscheb} \quad P(|X-\mu| \geq 2\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{4\sigma^2} = 0.25$$

$$\text{unimodal} \quad P(|X-\mu| \geq 2\sigma) \leq \frac{1}{9} = 0.11$$

$$\text{In der Tat} \quad P(|X-\mu| \geq 2\sigma) = 0.0456$$

Beispiel (2)

$$X \sim E(\lambda)$$

$$\text{nach Tscheb} \quad P\left(\left|X-\frac{1}{\lambda}\right| \geq 2\frac{1}{\lambda}\right) \leq \frac{\lambda^2}{4\lambda^2} = 0.25$$

$$\text{unimodal} \quad P\left(\left|X-\frac{1}{\lambda}\right| \geq 2\frac{1}{\lambda}\right) \leq \frac{1}{9} = 0.11$$

$$\text{In der Tat} \quad P\left(\left|X-\frac{1}{\lambda}\right| \geq 2\frac{1}{\lambda}\right) = P\left(X \geq \frac{3}{\lambda}\right) = 0.0498$$

Beispiel (3)

$$X \sim P(\lambda)$$

nach Tscheb $\quad P\left(|X-\lambda| \geq 2\sqrt{\lambda}\right) \leq \dfrac{\lambda}{4\lambda} = 0.25$

In der Tat $\quad P\left(|X-\lambda| \geq 2\sqrt{\lambda}\right)$ hängt von λ ab

$$(a)\lambda = 1 \Rightarrow P(|X-1| \geq 2) = P(X \geq 3) =$$

$$(b)\lambda = 4 \Rightarrow P(|X-4| \geq 4) = P(X \geq 8) =$$

$$(c)\lambda = 9 \Rightarrow P(|X-9| \geq 6) = P(X \leq 3) + P(X \geq 15)$$

$$=$$