Prof. Antony Unwin, Alexander Pilhöfer
Lehrstuhl für Rechnerorientierte Statistik und Datenanalyse
Institut für Mathematik
Universität Augsburg
http://stats.math.uni-augsburg.de/

Wahrscheinlichkeitstheorie
Übungsblatt 11

Abgabe: *Donnerstag 26. Januar 2012, bis spätestens 12.00 Uhr*; Briefkasten: WTheorie oder per email

Die Aufgaben können auch in 2er-Gruppen bearbeitet und abgegeben werden!

1. (a) Wieviele Möglichkeiten gibt es, die Buchstaben des folgenden Wortes anzuordnen: **(1P)**

   "Simsalabimbambasaladusaladim"

   (**Zusatz, +1P**) Wie sieht es aus, wenn Vokale immer durch Konsonanten getrennt sein müssen?

   (b) Beschreiben Sie in eigenen Worten die Aussage des zentralen Grenzwertsatzes! **(1P)**

   (c) Sei $X \sim N(10, 4)$. Bestimmen Sie ein Intervall $S = [\mu - a, \mu + a]$, so dass $P(X \in S) = 0.995$!**(1P)**

   (d) "Die Binomialverteilung konvergiert gegen die Poissonverteilung". Erläutern Sie diese Aussage! **(1P)**

   Die weiteren Aufgaben befassen sich mit der Simulation verschiedener Situationen aus Aufgaben vergangener Übungsblätter. Unter anderem sind die Befehle `replicate` und `sample` sehr hilfreich. Auf Matrizenspalten , -zeilen oder -einträge kann man mittels `M[, j]`, `M[i, ]` und `M[i, j]` zugreifen.

2. **Waldbrände (5P)**

   (a) Simulieren Sie 1000 Waldbrände nach der Verteilung, die in Aufgabe 5 aus Blatt 3 angegeben ist.

   (b) Verändern Sie die Verteilung so, dass stetige Werte in $\mathbb{R}_0^+$ für die Brandgröße erlaubt sind. Simulieren Sie auch diesen Fall und vergleichen Sie die Ergebnisse.

   (c) Simulieren Sie Waldbrände wie in Aufgabe b) innerhalb eines festen Zeitfensters $[0, 1]$ nach folgenden Schemata:

   - für eine feste Anzahl an Waldbränden $n = 10, 100, 1000$
   - wenn die Anzahl der Waldbrände in diesem Zeitfenster Poissonverteilt ist mit $\lambda = 10$.
   - die Zeit zwischen zwei Waldbränden sei exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 10$.

   Simulieren Sie jeden der Fälle 1000 Mal und betrachten Sie jeweils das Maximum. Vergleichen Sie die Ergebnisse untereinander und mit einer Gumbelverteilung.

3. **Arcussinus (5P)** Sie haben das Arcussinusgesetz kennengelernt für den Fall eines fairen Spiels mit +1 oder -1 Punkten. Betrachten Sie bei den folgenden Simulationen jeweils

   - den Zeitpunkt des letzten Gleichstandes (bzw. des letzten Vorzeichenwechsels)
   - die durchschnittliche Zeit, zu der Spieler 1 in Führung lag.

   Stellen Sie die Ergebnisse grafisch dar und geben Sie eine Interpretation.

   (a) Simulieren Sie (z.B.1000 Mal) ein faires Spiel mit 100 Runden, bei dem jedoch reellwertige Punktezahlen (wählen Sie eine geeignete Verteilung) möglich sind.

(b) Simulieren Sie auf gleiche Weise eine unfaires Spiel, bei dem einer der Spieler im Vorteil ist.

(c) Gehen Sie zurück zum Ausgangsfall eines fairen Spiels mit +1 oder -1 Punkten. Betrachten Sie anstelle der 100 Spiele den Fall eines festen Zeitfensters $[0, 1]$ und einer exponentialverteilten Wartezeit zwischen 2 Spielen mit $\lambda = 100$.

4. **Übungsleiter und mehr (5P)**

(a) Blatt 7, Aufgabe 2: Simulieren Sie das Übungsleitertreffen geeignet oft mit der Wartezeit aus Aufgabe b). Berechnen Sie daraus die Wahrscheinlichkeiten aus den Aufgaben a) und c).

(b) Betrachten Sie die geometrische Interpretation von Blatt 7, Aufgabe 2 und berechnen Sie mit einem ähnlichen Vorgehen

- die Kreiszahl π
- das Integral über der Dichte einer log-Normalverteilung auf einem Intervall $[a, b]$

Vergleichen Sie jeweils ihr Ergebnis mit den tatsächlichen Werten in R. Wie würden Sie das Volumen eines Polyeders mit begrenzenden Hyperebenen H_i berechnen?

5. **Diverses (5P)**

Bearbeiten Sie (mindestens) drei der folgenden Aufgaben Ihrer Wahl:

(a) Blatt 4, Aufgabe 3b): Berechnen Sie durch Simulation von 1000 Studenten den durchschnittlichen Gesamtgewinn pro Person für $\lambda = 3$, $p = 0.4$, $p_1 = 0.6$, $p_2 = 0.3$ und $p_3 = 0.1$!

(b) Blatt 5, Aufgabe 2 b): Simulieren Sie das Halbfinale im Tennis 1000 Mal und stellen Sie die Ergebnisse geeignet dar!

(c) Blatt 7, Aufgabe 5: Wählen Sie eine Ihnen bekannte und geeignet erscheinende Verteilung, um die Wertentwicklung einer Geldanlage mit Startwert 1000 Euro zu simulieren. Wählen Sie dabei das arithmetische Mittel der Wertänderungen identisch dem der ersten angegebenen Zeitreihe.

(d) Blatt 9, Aufgabe 3: Simulieren Sie für jeweils $m = 20$ Gebote die Wahrscheinlichkeiten aus den Aufgaben b) und c)!

(e) Blatt 9, Aufgabe 4: Berechnen Sie mittels Simulationen die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass der Werfer zu Unrecht des Dopings bezichtigt wird bzw. dass das Doping nicht erkannt wird.

(f) Blatt 10, Aufgabe 2: Lassen Sie den Piloten 1000 Mal auf die Eisschollen fallen, wobei $\sigma = 4$ sei. Wie oft geht er unter? Wie oft geht er unter, obwohl die Eisscholle im Erwartungswert eine ausreichende Tragfähigkeit hatte?

(g) Blatt 5, Aufgabe 4 a): Simulieren Sie die Lampenfertigung für die angegebenen Werte. Wie gut stimmen die Werte mit Ihren Berechnungen überein?

(h) Blatt 5, Aufgabe 4 a): Simulieren Sie die Lampenfertigung

- für verschiedene Werte von n bei konstantem Anteil schlechter Ringe.
- für verschiedene Werte von k ($p = k/n$) bei konstanter Lampenzahl n.

Stellen Sie die Ergebnisse grafisch dar! Sind sie überraschend?