Prof. Antony Unwin, Alexander Pilhöfer
Lehrstuhl für Rechnerorientierte Statistik und Datenanalyse
Institut für Mathematik
Universität Augsburg
http://stats.math.uni-augsburg.de/

Wahrscheinlichkeitstheorie
Übungsblatt 3

Abgabe: *Donnerstag 10. November 2011, bis spätestens 12.00 Uhr*; Briefkasten: WTheorie oder per email

Die Aufgaben können auch in 2er-Gruppen bearbeitet und abgegeben werden!

1. (a) X $\sim$ P(λ = 3). Was ist P(X $\leq$ 2)? **(1P)**
   (b) Welche Poissonverteilung approximiert die Binomialverteilung $B(1296, 1/24)$? **(1P)**
   (c) Seien X_i iid ZV. Was ist dann $Var[\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i]$? **(1P)**
   (d) Geben Sie ein Beispiel, für welches $|E[X]| < E[|X|]$! (Allg. gilt $|E[X]| \leq E[|X|]$) **(1P)**

2. **Rekursion I (5P)**

   Verifizieren Sie die nachfolgenden Rekursionsformeln.

   (a) Binomial$(k+1; N, p) = \frac{(N-k)p}{(k+1)(1-p)}$Binomial$(k; N, p)$.
   (b) Poisson$(k+1; \lambda) = \frac{\lambda}{k+1}$Poisson$(k; \lambda)$.
   (c) Hypergeometrisch$(k+1; n, N, K) = \frac{(K-k)(n-k)}{(k+1)(N-K-n+k+1)}$Hypergeometrisch$(k; n, N, K)$.
   (d) Zeigen Sie, dass die Summe von r unabhängigen geometrisch verteilten Zufallsvariablen G_i einer negativen Binomialverteilung genügt! (Verwenden Sie z.B. die Ereignisse $G_i = k_i$ und $\sum k_i = k$)

3. **Rekursion II (6P)**

   Betrachtet wird die folgende Rekursionsformel:

$$p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) \cdot p_{k-1}, k \geq 1 \tag{1}$$

   (a) Welche Eigenschaften müssen die Folge (p_k), $k \in \mathbb{N}_0$ und die Parameter a und b erfüllen, damit $p_k = P(X = k)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine Zufallsvariable X definiert?
   (b) Was muss gelten, damit der Erwartungswert $E[X]$ existiert?
   (c) Erwartungswert und Varianz der Verteilung ergeben sich als:

$$E[X] = \frac{a+b}{(1-a)} \qquad Var[X] = \frac{a+b}{(1-a)^2} \tag{2}$$

   Wie beeinflusst a das Verhältnis der beiden Größen? Welche Eigenschaften von a und b können Sie aus den Ausdrücken für den Erwartungswert und die Varianz ableiten?
   (d) Was ist $E[X^2]$?
   (e) Zeigen Sie, dass die Binomialverteilung, die Poissonverteilung und die negative Binomialverteilung zu dieser Familie gehören!

4. **Teatime (4P)**

   Ein Teetrinker behauptet, schmecken zu können, ob der Tee auf den Zucker gegeben wurde, oder umgekehrt. Er erklärt sich zu einem Experiment bereit: Jemand füllt zehn Tassen mit Zucker und Tee; bei jeder Tasse entscheidet er durch einen Münzwurf, ob er zuerst Zucker oder zuerst Tee in die Tasse gibt. Danach wird der Teetrinker in das Zimmer gelassen und darf probieren.

   Nehmen wir an, er rät nur:

   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens achtmal richtig tippt?

   (b) Ist diese Wahrscheinlichkeit kleiner oder größer als dass er mindestens 16 mal richtig tippt bei 20 Versuchen?

   (c) Nehmen wir nun an, er besäße tatsächlich ein gewisses Gespür und liege in 80% der Fälle richtig. Er tritt mit dem Experiment bei Wetten-Dass auf, wo er zum Gewinn mindestens 9 von 12 Mal korrekt antworten muss. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt er bereits nach 10 Versuchen? Mit welcher Wahrscheinlichkeit verliert er bereits mit dem fünften Versuch?

5. **Waldbrände (5P)**

   Die Größe von Waldbränden werde mit positiven ganzen Zahlen $s \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ klassifiziert. Ihre Verteilung sei

   $$P(\text{Größe} = s) = 0.5^s.$$

   Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Waldbrand entdeckt wird, hängt von der Größe des Brandes ab:

   $$P(\text{entdeckt}|\text{Größe} = s) = 1 - \kappa \cdot 0.6^s.$$

   (a) Zeigen Sie, dass mit obigem ersten Ausdruck eine Wahrscheinlichkeitsverteilung definiert ist. Welche Werte für κ sind im zweiten Ausdruck möglich? Interpretieren Sie die beiden Parametrisierungen. Was würde der zweite Ausdruck im Fall der Setzung $\kappa := 0$ besagen?

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Waldbrand größer als $s_0 \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ klassifiziert wird, unter der Bedingung, daß er entdeckt worden ist?