



Prof. Antony Unwin, Alexander Pilhöfer
Lehrstuhl für Rechnerorientierte Statistik und Datenanalyse
Institut für Mathematik
Universität Augsburg
<http://stats.math.uni-augsburg.de/>

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 5

Abgabe: Donnerstag 24. November 2011, bis spätestens 12.00 Uhr; Briefkasten: WTheorie oder per email

Die Aufgaben können auch in 2er-Gruppen bearbeitet und abgegeben werden!

Achten Sie auf saubere mathematische Arbeitsweise!

- (a) X_1 und X_2 u.i.v. $Pois(\lambda = 4)$. Wie ist $X_1 + X_2$ verteilt? **(1P)**
(b) Berechnen Sie die WEF der Summe zweier unabhängiger Poissonverteilungen ohne (a). **(1P)**
(c) Lösen Sie Aufgabe 4c) von Blatt 3 in R! **(1P)**
(d) Mit welcher Wskt. bleibt mindestens eine Bar ganz leer, wenn 5 Leute zwischen 3 Bars mit gleicher Wskt. auswählen? **(1P)**

2. Tennis (5P)

Für Tennisprofis gibt es eine Weltrangliste. Nehmen wir an, dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler mit Rang j ein Spiel gewinnt, unabhängig vom Gegner, proportional zu $1/j$ ist. Beim Masters-Turnier stehen die Spieler mit den Rängen 2, 3, 7 und 9 im Halbfinale.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Spielausgänge zwischen zwei Spielern mit den Rängen m und n ($m \neq n, m \neq 1, n \neq 1$).
- Für das Halbfinale werden folgende Paarungen ausgelost: Rang 2 vs. Rang 3 und Rang 7 vs. Rang 9. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler mit Rang 7 das Turnier gewinnt?

3. Erleuchtung I (5P)

Ein Student erlangt in der Vorlesung die vollkommene Erkenntnis (der Wahrscheinlichkeitstheorie). Jemand, der die vollkommene Erkenntnis erlangt hat, verspürt das Bedürfnis, sich anderen mitzuteilen, die noch nicht erleuchtet sind. Die Anzahl der durch diese Person neu erleuchteten Personen sei Poissonverteilt mit Parameter λ .

- Für welche Werte von λ stirbt die Erleuchtung ganz allgemein (mit Wskt. 1) aus?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Erleuchtung nach $k = 1..7$ Generationen verschwunden, wenn man annehmen kann, dass $\lambda = 0.7$ gilt?
- Ein Assistent behauptet, die WEF für die Gesamtzahl der Erleuchteten $S_k = \sum_{i=0}^k Z_i$ in der k -ten Generation sei

$$g_{S_k}(z) = \prod_{i=0}^k g_i(z) \quad (1)$$

Erläutern Sie, ob er Recht hat!

4. Erleuchtung II (5P)

Für einen speziellen Lampentyp werden je Lampe 4 Glasringe verbaut. Ist einer der Glasringe defekt, so wird auch die Lampe unbrauchbar sein. Für die Fertigung von n Lampen werden genau $4n$ Ringe in die Maschine gegeben. Der Anteil kaputter Ringe sei $p = k/(4n)$. Die Maschine wird nur dann für die Produktion freigegeben, wenn der Anteil der kaputten Lampen höchstens 25% beträgt.

(Der zuständige Ingenieur fragt sich, ob es vielleicht sinnvoll wäre, die Ringe vor Eingabe in die Maschine auszusortieren.)

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei $n = 20$ Lampen und $p = 10\%$ genau 5 Lampen defekt sind?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Maschine nicht freigegeben?
- Welche Verteilung könnte man annehmen, wenn n sehr groß wird? Wie groß ist dann die erwartete Anzahl kaputter Lampen in Abhängigkeit von k und n ? Sollte man die Ringe vorher aussortieren?
- (Zusatz, +3P) Bearbeiten Sie die Aufgabe in R. Definieren Sie ggf. eine eigene Funktion wie in Aufgabe 5. Mit `factorial(n)` und `choose(n, k)` sind Fakultät und Binomialkoeffizient verfügbar.

5. R-leuchtung (5P)

Definieren Sie folgende eigene Funktion:

```
f1 = function(z, lambda){
  s <- exp(-lambda*(1-z))
  return(s)
}
```

- Um welche Funktion handelt es sich? Berechnen Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 3 b) in R.
- Erläutern Sie die Bedeutung folgender Funktion:

```
f2 = function(lambda, r, n0 = 1){
  s <- n0
  for( i in 1:r ){
    s <- sum(rpois(s, lambda = lambda))
  }
  return(s)
}
```

- Benutzen Sie diese Funktion zusammen mit `replicate(n, fun)` und `"== 0"` um die Ereignisse in Aufgabe 3 b) hundert mal zu simulieren.

Stimmt der Anteil der ausgestorbenen Linien unter den Simulationen mit der von Ihnen berechneten Wahrscheinlichkeit überein?

TIPP: Studieren Sie ggf. die Hilfe (hier: `?replicate`) und gehen Sie Schritt für Schritt vor (Wie funktioniert `f2`? Wie funktioniert `replicate`? Wie funktioniert `f2` mit `"== 0"`? usw.).