Prof. Antony Unwin, Alexander Pilhöfer
Lehrstuhl für Rechnerorientierte Statistik und Datenanalyse
Institut für Mathematik
Universität Augsburg
http://stats.math.uni-augsburg.de/

Wahrscheinlichkeitstheorie
Übungsblatt 6

Abgabe: *Donnerstag 01. Dezember 2011, bis spätestens 12.00 Uhr*; Briefkasten: WTheorie oder per email

Die Aufgaben können auch in 2er-Gruppen bearbeitet und abgegeben werden!

1. (a) Seien $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ u.i.v. Zufallsvariablen. Wie ist $Z_n = \sum_{i=1}^{2n}(-1)^i X_i$ verteilt? **(1P)**
   (b) Leiten Sie den Erwartungswert einer exponentialverteilten Zufallsvariable her! **(1P)**
   (c) Sei $X \sim N(5, 4)$. Was ist $P(X = 5)$? **(1P)**
   (d) Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Für welchen Wert s gilt $P(X > s) = 0.5$? **(1P)**

2. **Zufallsvariable (5P)**

   Sei X eine stetige Zufallsvariable mit der Dichte

   $$f(x) = \frac{a}{1+x^2} \qquad (x \text{ reelle Zahl}).$$

   Man berechne

   (a) den Koeffizienten a;
   (b) die Verteilungsfunktion von X;
   (c) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X einen Wert im Intervall $[0, 1]$ annimmt.

3. **Weg zur Arbeit (5P)**

   Ein Assistent wohnt in M und arbeitet in H. Er beginnt um 8:30 Uhr morgens mit der Arbeit. Er nimmt jeden Morgen den Zug von M nach A, der in A laut Fahrplan um 8:10 Uhr ankommt. Dort fährt alle 15 min. eine Tram nach H ab. Die Tram, die um 8:15 Uhr in A startet, trifft laut Fahrplan um 8:26 Uhr in H ein. Die Verspätung des Zuges von M nach A beträgt durchschnittlich 4 min., mit einer Standardabweichung von 2 min. Die Tram von A nach H fährt immer pünktlich ab, erreicht H aber mit durchschnittlich 2 min. Verspätung und einer Standardabweichung von 4 min.

   Berechnen Sie die Ergebnisse nachfolgender Teilaufgaben in `R`.

   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Assistent nach 8:30 Uhr in H ankommt?
   (b) Ein Professor startet in A mit seinem Auto um 8:15 Uhr. Seine Fahrzeit nach H beträgt durchschnittlich 12 min., mit einer Standardabweichung von 3 min. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Professor nach 8:30 Uhr in H ankommt?
   (c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Professor und Assistent beide nach 8:30 Uhr in H ankommen. Welche Annahmen haben Sie zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten getroffen?

4. **Exponentialverteilung (5P)**

   Bezeichne X die Lebensdauer einer Fernsehbildröhre mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) \quad = \quad \lambda e^{-\lambda x} \qquad x, \lambda > 0 \tag{1}$$

   Bestimme folgende Wahrscheinlichkeiten:

   (a) $P(j < X \leq j+1)$,für $j = 0, 1, 2, 3, ...$

   (b) $P(X > s)$, für $s > 0$

   (c) $P(X > s + t | X > t)$, für $s, t > 0$

   (d) Falls $P(X > s) = \alpha$, so drücke man λ durch α und s aus.

   (e) Zeichnen Sie in R sowohl die Dichte als auch die Verteilungsfunktion für ein λ Ihrer Wahl. Wie sind die Wahrscheinlichkeiten $P(a < X \leq b)$ in den beiden Grafiken repräsentiert?

5. **Radar (5P)**

   Radargeräte sind mit einem zufälligen "Rauschpegel" behaftet, dessen Verteilung die Dichte

$$f(x) = 2x \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \text{ für } x > 0$$

   besitzt. Falls der Rauschpegel größer als eine gewisse Konstante d ist, so werden Geräte in Kategorie 2 eingestuft, andernfalls in Kategorie 1.

   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Gerät der Kategorie 1 einen Rauschpegel kleiner als $\frac{2}{3}d$ hat?

   (b) Bestimmen Sie eine Integralgleichung für d, so dass der durchschnittliche Rauschpegel in der Kategorie 1 um d Einheiten kleiner ist als der durchschnittliche Rauschpegel in Kategorie 2.