Prof. Antony Unwin, Alexander Pilhöfer
Lehrstuhl für Rechnerorientierte Statistik und Datenanalyse
Institut für Mathematik
Universität Augsburg
http://stats.math.uni-augsburg.de/

Wahrscheinlichkeitstheorie
Übungsblatt 7

Abgabe: *Donnerstag 08. Dezember 2011, bis spätestens 12.00 Uhr*; Briefkasten: WTheorie oder per email

Die Aufgaben können auch in 2er-Gruppen bearbeitet und abgegeben werden!

1. (a) Bestimmen sie eine nichttriviale σ-Algebra auf der Menge $\{1, 2, 3\}$! **(1P)**
   (b) In einem Raum befinden sich drei Studierende. Wie hoch ist die Wskt., dass mindestens zwei am selben Wochentag geboren wurden? **(1P)**
   (c) Seien $X_1 \sim Exp(1/3)$, $X_2 \sim Exp(1/4)$ unabhängige ZV. Bestimmen Sie $Var[2X_1 + X_2]$ **(1P)**
   (d) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $P(Y > s)$ für $Y \sim Exp(\lambda)$ und $s > 0$ an. **(1P)**

2. **Übungsleitertreffen (5P)**

   Hiwi A und S wollen sich Freitag zwischen 12 und 13 Uhr in der Bibliothek treffen um Übungsblätter zu korrigieren. Da sie beide an der Uni sehr beschäftigt sind, können sie beide keinen exakten Termin einhalten, weshalb sie beide zufällig zwischen 12 und 13 Uhr am Treffpunkt ankommen. A und S vereinbaren, dass sie höchstens 10 min aufeinander warten, jedoch maximal bis 13 Uhr.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit verpassen sich A und S nicht?
   (b) Welche Wartezeit müssen beide ausmachen, damit sie sich mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.75 treffen?
   (c) Gegeben, dass sie sich getroffen haben, was ist die Wahrscheinlichkeit, dass A vor 12:45 Uhr angekommen ist?
   (d) Interpretieren Sie das Problem geometrisch in einer passenden grafischen Darstellung!

3. **Dichte (5P)**

   Eine Zufallsvariable X habe eine Verteilung mit folgender Dichte ($a < m1 < m2 < b$):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a+m2-m1)(m1-a)}, & a \leq x \leq m1 \\ \frac{2}{(b-a+m2-m1)}, & m1 < x \leq m2 \\ \frac{2(b-x)}{(b-a+m2-m1)(b-m2)}, & m2 < x \leq b \end{cases}$$

   a) Skizzieren Sie die Funktion und geben Sie dabei die wichtigen Punkte auf den Achsen an. Zeigen Sie, dass es sich tatsächlich um eine Dichte handelt (Tipp: Form der Funktion). Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion.
   b) Der Median einer reellen Zufallsvariable X ist definiert als

$$Med(X) = inf\{s \in \mathbb{R} : P(X \leq s) \geq 0.5\}$$

   Was muss für $a, b, m1$ und $m2$ gelten, damit $E[X]$ kleiner, größer oder gleich dem Median ist?
   c) Seien Y und Z unabhängige Zufallsvariablen und $X = Y + Z$ habe die obige Verteilung mit $m1 - a = b - m2$. Welche Verteilungen haben dann Y und Z?

4. **Stichproben (5P)**

Sei

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x \leq 0, \\ x & 0 < x \leq 1, \\ 1 & 1 < x < \infty. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Man zeige, dass F eine Verteilungsfunktion ist, und leite die Dichte her. Um welche Verteilung handelt es sich?

(b) X sei eine Zufallsvariable mit stetiger, streng monotoner Verteilungsfunktion G. Man zeige, dass $G \circ X$ die Verteilungsfunktion F hat.

(c) Die Zufallsvariable Y habe die Verteilungsfunktion F. G sei eine beliebige, streng monotone Verteilungsfunktion. Man zeige, dass $G^{-1} \circ Y$ die Verteilungsfunktion G hat.

(d) Ziehen Sie in R eine Stichprobe des Umfangs $n = 10000$ aus der Verteilung F. Definieren Sie (wie in Aufgabe 4, Blatt 5) die Funktion

```
ginvers = function(y, s){
        -log(1-y)/s
}
```

Wenden Sie die Funktion auf Ihre Stichprobe an. Um welche Funktion handelt es sich?

(e) Zeichnen Sie ein Histogramm der transformierten Stichprobe (mit geeigneter Binbreite) und zeichnen Sie eine passende Dichtefunktion ein. Verwenden Sie dazu den Befehl

```
curve( myfun(x, ... ), add = TRUE, lwd=2, col = "red", n = 10000 )
```

5. **Kapitalanlage (5P)**

Ein Anleger hat drei Kapitalanlagen, die monatlichen Wertänderungen $c_i = 1 + r_i$, $i = 1...12$ unterliegen, wobei die Renditen r_i als Zufallsvariablen unterschiedlicher Verteilungen betrachtet werden können. Die Startwerte der Anlagen sind $1000, 3000$ und 5000 Euro und zu den Zeitpunkten t_1 bis t_{12} ergaben sich die folgenden Werte:

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
$g1$	1091.57	1139.80	1255.41	1265.43	1329.32	1420.20
$g2$	3028.92	3269.21	3305.62	3482.25	3581.14	3630.29
$g3$	5057.47	5155.05	5230.96	5301.21	5396.00	5551.38

	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}	t_{12}
$g1$	1448.73	1403.00	1471.86	1561.91	1539.77	1754.87
$g2$	3786.17	3854.16	4004.76	4020.69	4184.85	4239.19
$g3$	5695.88	5789.94	5886.87	5972.35	6084.98	6184.79

(a) Was würden Sie als die mittlere Wertänderung
- für eine Anlage g_j, $j = 1...3$
- für einen Monat i
- für das Gesamtkapital $g1_i + g2_i + g3_i$ bezogen auf t_0

bezeichnen?

(b) Geben Sie in allgemeiner Form eine Funktion $gm(x)$ an, so dass für jede Anlage gilt:

$$g_k/g_0 = gm(c_1, ..., c_k)^k$$

(c) Zeigen Sie (z.B. unter Verwendung einer Ungleichung aus der VL), dass allgemein für u.i.v. reelle, nicht negative Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ gilt, dass

$$gm(X_1, ..., X_n) \leq \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$