Prof. Antony Unwin, Alexander Pilhöfer
Lehrstuhl für Rechnerorientierte Statistik und Datenanalyse
Institut für Mathematik
Universität Augsburg
http://stats.math.uni-augsburg.de/

Wahrscheinlichkeitstheorie
Übungsblatt 8

Abgabe: *Donnerstag 15. Dezember 2011, bis spätestens 12.00 Uhr*; Briefkasten: WTheorie oder per email

Die Aufgaben können auch in 2er-Gruppen bearbeitet und abgegeben werden!

1. (a) Zeigen Sie, dass `dnorm(0,0,1)` den Wert $1/\sqrt{2\pi}$ ergibt. **(1P)**
   (b) Wie viele Personen müssen sich mindestens in einem Raum befinden, damit P(min. 2 haben am selben Tag Geburtstag) ≥ 0.5? (ohne Schalttage) **(1P)**
   (c) Sei $X \sim Exp(\lambda)$. Leiten Sie formal die momenterzeugende Funktion $M_X(t)$ her! **(1P)**
   (d) Sei $X \sim N(10, 4)$. Berechnen Sie in R $P(X \leq 8)$, $P(X > 13)$, $P(X = 10)$ **(1P)**

2. **Charakteristische Momente (5P)**

   (a) Sei X eine Zufallsvariable mit existierender momenterzeugender Funktion $M_X(t)$ und charakteristischer Funktion $\zeta_X(t)$. Zeigen Sie:

   i. Für das k. Moment ($k \in \mathbb{Z}^+$) gilt:

   $$E(X^k) = M_X^{(k)}(0) = i^{-k}\zeta_X^{(k)}(0)$$

   ii. Für Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

   $$\begin{aligned} M_{aX+b}(t) &= e^{bt}M_X(at) = e^{bt}M_{aX}(t) \quad (1)\\ \zeta_{aX+b}(t) &= e^{ibt}\zeta_X(at) = e^{ibt}\zeta_{aX}(t) \quad (2) \end{aligned}$$

   (b) Seien $X_1, X_2, ...$ u.i.v. Zufallsvariablen auf $\mathbb{R}$ mit charakteristischer Funktion ζ_X und N eine von allen X_i unabhängige Zufallsvariable auf $\mathbb{N}_0$ mit erzeugender Funktion f_N. Zeigen Sie, dass $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$ die charakteristische Funktion $\zeta_Y(t) = f_N(\zeta_X(t))$ hat. Geben Sie diese insbesondere für $N \sim Pois(\lambda)$ an!

3. **Charakteristische Funktionen (5P)**

   Seien $X_1, X_2, ...$ unabhängige, auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Verwenden Sie charakteristische Funktionen um folgende Aussagen zu zeigen:

   (a) Die Zufallsvariable

   $$Z_m = -log(\prod_{i=1}^{m}(X_i)^2)$$

   genügt einer χ^2-Verteilung mit $2m$ Freiheitsgraden, d.h. ihre charakteristische Funktion $\zeta(Z_m)(t)$ hat die Form:

   $$\zeta_{Z_m} = \zeta(\chi_k^2)(t) = \frac{1}{(1-2it)^{k/2}}$$

(b) Erstellen Sie in R basierend auf Basis von Aufgabe a) eine Zufallsstichprobe aus einer χ^2-Verteilung mit 6 Freiheitsgraden. Benutzen Sie, dass für $X \sim N(0,1)$ die Zufallsvariable $X^* = X^2 \sim \chi_1^2$, um eine Stichprobe aus einer χ^2-Verteilung mit 7 Freiheitsgraden zu ziehen. Vergleichen Sie ein Histogramm Ihrer Stichproben mit den theoretischen Dichtefunktionen.

(c) Zeigen Sie, dass die Summe unabhängiger, exponentialverteilter Zufallsvariablen Y_i mit gleichem Erwartungswert λ einer Gammaverteilung genügt. Die charakteristische Funktion $\zeta_{\gamma,p,b}$ einer Gammaverteilung hat die Form:

$$\zeta_{\gamma,p,b}(t) = \left(\frac{b}{(b-it)}\right)^p$$

(d) Ziehen Sie auf Basis von Aufgabe a) Rückschlüsse über den Zusammenhang der χ^2-Verteilung und der Exponentialverteilung. Benutzen Sie dabei z.B. Aufgabe 4 auf Blatt 7.

4. **Grenzwertsätze (5P)**

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, identisch $N(\mu = 3, \sigma^2 = 16)$-verteilte Zufallsvariablen .

(a) Veranschaulichen Sie in `R` die Aussage des Gesetzes der großen Zahlen hinsichtlich der Konvergenz in Verteilung. Bestätigen Sie dazu anhand geeigneter Plots, dass die Folge der Zufallsvariablen $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ in Verteilung gegen 3 konvergiert.

(b) Veranschaulichen Sie in `R` die Aussage des Zentralen Grentwertsatzes hinsichtlich der Konvergenz in Verteilung. Bestätigen Sie dazu anhand geeigneter Plots, dass die Folge der Zufallsvariablen $\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ in Verteilung gegen eine standardnormalverteilte Zufallsvariable konvergiert.

(c) Ziehen Sie in R eine Stichprobe Y des Umfangs 50 aus einer beliebigen Normalverteilung. Vergleichen Sie die Empirische Verteilungsfunktion `ecdf(Y)(x)` mit der theoretischen Verteilungsfunktion. Wie ist die empirische Verteilungsfunktion definiert? (Wer möchte, kann a) und b) auch mit der `ecdf` zeigen)

5. **Encyclopedia of Statistical Sciences (5P)**

Eine völlig überarbeitete Ausgabe der "Encyclopedia of Statistical Sciences" wurde gesetzt. Sie hat nun 10 000 Seiten. Pro Seite sei die Anzahl der Fehler, die die Korrekturleser finden, unabhängig Poisson-verteilt mit dem Parameter $\lambda = 0.5$.

(a) Man bestimme "näherungsweise" die Wahrscheinlichkeit dafür, mehr als 4 500 und weniger als 5 500 Fehler zu finden, mit

i. der Tschebychew Ungleichung,

ii. dem zentralen Grenzwertsatz.

(b) In welchem Intervall liegt "näherungsweise" mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% die Anzahl der gefundenen Fehler, wenn Sie von einer Normalverteilung ausgehen und ein symmetrisches Intervall um den Erwartungswert legen?