Prof. Antony Unwin, Alexander Pilhöfer
Lehrstuhl für Rechnerorientierte Statistik und Datenanalyse
Institut für Mathematik
Universität Augsburg
http://stats.math.uni-augsburg.de/

Wahrscheinlichkeitstheorie
Übungsblatt 9

Abgabe: *Donnerstag 22. Dezember 2011, bis spätestens 12.00 Uhr*; Briefkasten: WTheorie oder per email

Die Aufgaben können auch in 2er-Gruppen bearbeitet und abgegeben werden!

1. (a) Zeigen Sie ergänzend zum Beweis 12.4.1 der VL, dass
   $F(X+\epsilon) \geq F_n(X) - P(|X_n - X| > \epsilon)$ und $F(X-\epsilon) \leq F_n(X) + P(|X_n - X| > \epsilon)$ **(1P)**

   (b) Sei $X \sim B(N,p)$. Zeigen Sie, dass für $N \to \infty$ gilt: $F_X \stackrel{i.V.}{\longrightarrow} F_{N(Np,Npq)}$. **(1P)**

   (c) Seien $X_1, \ldots, X_n \stackrel{u.i.v.}{\sim} U(0,\theta)$ und $\theta \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie, dass $\max\{X_1, \ldots, X_n\} \stackrel{inWskt.}{\longrightarrow} \theta$ **(2P)**

2. **Schranken (5P)**

   Für unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ existiere der Erwartungswert $E(X) = \mu$ und die Varianz $V(X) = \sigma^2 > 0$, und es gelte $E(|X-\mu|^3) < 2\sigma^3$.

   (a) Wie groß muß eine Stichprobe mindestens sein, damit die Berry-Esséen Schranke für die Normalapproximation der Verteilung des standardisierten Stichprobenmittels kleiner oder gleich 0.05 ist?

   (b) Falls die Stichprobengröße 625 beträgt, geben Sie eine auf der Berry-Esséen Schranke basierende Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit an, daß das Stichprobenmittel größer als $1.96\frac{\sigma}{25}+\mu$ ist.

   (c) Vergleichen Sie das Resultat aus vorheriger Teilaufgabe (b) mit dem Ergebnis, das sich aus einer Anwendung der Tschebychew Ungleichung ergibt.

3. **Château Pétrus (5P)**

   In einer privaten Versteigerung werden zwei Kisten Chateau Petrus 1993 angeboten. Angebote müssen vertraulich eingereicht werden, und die zwei höchsten werden je eine Kiste zu dem durchschnittlichen Preis der zwei Angebote bekommen. Es werden insgesamt m Angebote eingereicht.

   (a) Wenn alle Angebote als unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit der Dichte f (bzw. Verteilungsfunktion F) angesehen werden können, was ist der Erwartungswert für das höchste Angebot? Drücken Sie hierbei den Erwartungswert als Funktion von f und F aus.

   (b) Gegeben man selbst hat w geboten, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das eigene Angebot keinen Erfolg hat?

   (c) Geben Sie eine Formel für die Wahrscheinlichkeit an, dass die beiden höchsten Gebote weiter auseinanderliegen, als das zweit- und dritthöchste Gebot. Ist dies wahrscheinlich, wenn man den Geboten Exponentialverteilungen unterstellt (ohne Rechnung)?

4. **Speerwurf (5P)**

   Die Leistung eines Speerwerfers werde mit einer Exponentialverteilung mit Parameter λ_1 modelliert. Die Einnahme gewisser Medikamente steigert seine Leistungsfähigkeit, so daß seine Leistung dann mit einer Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda_2 < \lambda_1$ modelliert werden kann. Aus Angst vor Dopingkontrollen nimmt der Sportler nur mit Wahrscheinlichkeit p vor einem Wettkampf diese Medikamente ein. Bei einem Wettkampf erzielt der Sportler eine neue Rekordweite, indem er die alte Bestmarke von x_0 Metern übertrifft.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit nahm er vor dem Wettkampf leistungssteigernde Präparate ein? Drücken Sie hierbei diese Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von λ_1, λ_2, x_0 und p aus.

   (b) Plotten Sie in `R` die Wahrscheinlichkeit aus vorheriger Teilaufgabe (a) für jeweils $p = 0.10, 0.25, 0.50, 0.75$ und 0.90 gegen die Weite x_0 bei Parametern $\lambda_1 = 0.020$ und $\lambda_2 = 0.015$ (d.h. als Funktion von x_0).

5. **Atomkraft (5P)**

   Seit der Katastrophe in Japan macht sich die Nuklearindustrie verstärkt Gdanken über mögliche Schäden durch Naturkatastrophen wie beispielsweise Erdbeben. Für die (standardisierte) maximale Stärke eines Erdbebens zur Laufzeit und im Gebiet eines Kraftwerks sind zwei Extremwertverteilungen vorgeschlagen worden: Eine Gumbel mit Verteilungsfunktion $G(x) = exp(-exp(-x))$ und eine Fréchet mit Verteilungsfunktion $G(x) = exp(-(1 + 0.05x)^{-20})$.

   (a) Plotten Sie in `R` diese Verteilungen. Wo liegt ungefähr der maximale Unterschied zwischen diesen Verteilungen? Plotten Sie in `R` den Unterschied als Funktion von x. Welche würden Sie als strenger bezeichnen?

   (b) Was ist der Unterschied zwischen einer Extremwertverteilung und der Verteilung des Maximums von n Zufallsvariablen?

   (c) Gehen Sie nun von der Gumbelverteilung aus. Alle k (als im Erdbebensinne unabhängig anzunehmende) Kraftwerke sollen mit einem identischen Schutz gegen Erdbeben bis zu einer Stärke α ausgestattet werden. Welchen Wert von α muss man mindestens wählen, damit die Wahrscheinlichkeit für eine Katastrophe höchstens p beträgt? Plotten Sie für ausgewählte Werte von k die minimale Schutzstärke α gegen diese Wahrscheinlichkeit.